Montréal et New York juin 1962

SÉRIE MATHÉMATIQUES

I

Étudier. les variations et construire la représentation graphique de la fonction y de la variable x définie par

$$y = \sqrt{x^2 - x}.$$

II

On considère, sur une droite, trois points fixes, P, B, C, se succédant dans cet ordre, et l'on désigne par (Γ) un cercle quelconque passant par B et C.

1. Le lieu des points de contact A des tangentes menées par P aux cercles (Γ) est un cercle (S). Sous quel angle se coupent (S) et (Γ) ?
2. L'un des cercles (Γ) étant envisagé, construire les cercles (Ω) tangents à la droite BC et au cercle (Γ) au point A; montrer que, lorsque (Γ) varie, ces cercles forment deux familles de cercles, (Ω_1) et (Ω_2), respectivement tangents à BC en deux points fixes, Δ_1, et Δ_1.
3. De B et C on mène les tangentes à chaque cercle (Ω_1) (elles se coupent en M_1) et les tangentes à chaque cercle (Ω_2) (elles se coupent en M_2).
   Lieux de M_1 et M_2·
4. Montrer que AA_1 et AA_2 sont les bissectrices de l'angle A du triangle ABC et que l'expression
   $$\frac{AB \times AC}{AC^2 - AB^2}$$
   a une valeur constante, indépendante du cercle envisagé.
5. On transforme la figure par une inversion de puissance quelconque ayant pour pôle le point P.
   Que deviennent les cercles (Γ), le cercle (S), les cercles (Ω_1) et (Ω_2) ?
   Construire avec précision l'un des cercles $\left(\Omega_1'\right)$ transformé d'un cercle (Ω_1).
   Lieu des centres des cercles $\left(\Omega_1'\right)$ et $\left(\Omega_2'\right)$, transformés des cercles (Ω_1) et (Ω_2).