Durée : 4 heures

Baccalauréat C Niamey juin 1970

EXERCICE 1

On considère l'ensemble $\mathrm{I} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ des n premiers entiers strictement positifs.

1. Montrer brièvement que l'ensemble S_n des bijections de I sur I, muni de la composition $\circ$ des applications, est un groupe.
2. On dit qu'un élément s de S_n est une transposition s'il existe deux éléments distincts, i et j, de I tels que

$$s(i) = j,\ s(j) = i,\quad \forall k \in \mathrm{I} - \{i,\ j\},\ s(k) = k.$$

   Prouver que si s et t sont deux transpositions, on a nécessairement

$$s \circ t = e \quad \text{ou} \quad (s \circ t)^2 = e \quad \text{ou} \quad (s \circ t)^2 = e$$

   e étant l'élément neutre de S_n.

EXERCICE 2

Soit $Z = \dfrac{1 - \mathrm{i}z}{1 - \mathrm{i}z}$. On pose $z = x + \mathrm{i}y$.

1. Déterminer une condition que doivent satisfaire x et y pour que Z soit réel. Quel est alors l'ensemble des points m d'affixe z ?
2. Déterminer une condition que doivent satisfaire x et y pour que Z soit imaginaire pur. Quel est alors l'ensemble des points m d'affixe z ? .
3. Déterminer les complexes z tels que $Z = z$. Placer les points correspondant à ces valeurs dans le plan complexe.

EXERCICE 3

Partie A

Soit la fonction f définie par

$$f(t) = \frac{1}{t(t+1)^2}.$$

1. Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative en repère orthonormé.
2. Déterminer les constantes a, b et c telles que

$$f(t) = \frac{a}{(t+1)^2} + \frac{b}{(t+1)} + \frac{c}{t} \quad (t \neq -1 \text{ et } t \neq 0).$$

3. Pour $0 < x < y$, on pose

$$A(x,\ y) = \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Montrer que

$$A(x,\ y) = \frac{x - y}{(x+1)(y+1)} + \mathrm{Log}\,\frac{y(x+1)}{x(y+1)}$$

Partie B

On considère la fonction $g(t) = \dfrac{-1}{t^2(t+1)}$.

1. Vérifier que $g(t) - f(t) = -\dfrac{2t+1}{(t^2+t)^2}$.
   Déterminer une primitive de la fonction $g - f$.
2. En déduire

$$B(x,\ y) = \int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{avec } 0 < x < y.$$

3. En considérant x fixe, positif, déterminer, lorsque $y \to +\infty$, les limites de $A(x,\ y)$ et $B(x,\ y)$ nommées respectivement $\Phi(x)$ et $\Gamma(x)$.

Partie C

En appliquant la formule des accroissements finis à la fonction « Logarithme népérien de »,

1. montrer que $\Gamma(x) < 0 < \Phi(x)$, x étant positif ;
2. en déduire que, pour $x > 0$, on a

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^x < \mathrm{e} < \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}.$$

3. n étant un entier naturel non nul, établir

$$1 < \frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < 1 + \frac{1}{n}$$

   En déduire la limite de $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ lorsque $n \to +\infty$.