∽ Baccalauréat C Nantes[1] septembre 1980 ∾

EXERCICE 1

1. α étant un élément de $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, discuter, suivant α le nombre de solutions de l'équation $X^2 = \alpha$, X étant un élément de $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.
2. Résoudre, dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, l'équation $x^4 + \dot{3}x^2 - \dot{5} = \dot{0}$.

EXERCICE 2

Dans le plan affine euclidien Σ, on considère trois points A, B, C formant un triangle rectangle en B, isocèle, tel que $d(\text{A}, \text{B}) = a$.

Déterminer et représenter l'ensemble E des points M de Σ tels que

$$2\,\overrightarrow{M\text{A}}^2 - \overrightarrow{M\text{B}}^2 - \overrightarrow{M\text{C}}^2 = 3a^2.$$

PROBLÈME

Les parties A, B, C peuvent être traitées indépendamment.

On désigne par F la fonction polynôme définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = x^2 - 3x + 2.$$

Partie A

On se propose de montrer que pour tout entier naturel n, il existe des réels a_n et b_n et une fonction polynôme g_n à coefficients réels, tels que l'on ait

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = g_n(x).F(x) + a_n x + b_n.$$

.

1. Déterminer g$_0$, a_0, b_0, g_1, a_1, b_1 et g_2, a_2, b_2.
2. Démontrer par récurrence l'existence de g_n, a_n, b_n pour tout n.
   On établira notamment les égalités

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 3a_n + b; \\ b_{n+1} & = & -2a_n \end{array}$$

3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n + b_n = 1.$$

4. Montrer que la suite de terme général $u_n = a_n + 1$ est une suite géométrique. En déduire les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

1. Corse

Partie B

Soit E un espace vectoriel réel de dimension deux, et soit $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ une base de E. On considère l'endomorphisme T de E dont la matrice dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère d'autre part les vecteurs

$$\vec{I} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \vec{J} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}.$$

1. Montrer que $\left(\vec{I}, \vec{J}\right)$ est une base de E.
2. Déterminer la matrice B de T dans la base $\left(\vec{I}, \vec{J}\right)$.
3. On pose $T^1 = T$, et on définit par récurrence $T^n = T^{n-1} \circ T$ pour $n \geqslant 2$.
   Calculer la matrice de T^n dans la base $\left(\vec{I}, \vec{J}\right)$; en déduire l'expression de la matrice de T^n dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
4. En déduire une autre manière d'obtenir le résultat de la question **A 4.**

Partie C

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = F\left(\mathrm{e}^x\right).$$

1. Faire une étude complète de la fonction f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé.
   On calculera notamment l'abscisse du point d'intersection de C avec son asymptote.
   (On utilisera les valeurs approchées $\text{Log}\,2 \approx 0,69$, $\text{Log}\,3 \approx 1,10$.)
2. On considère la restriction g de f à l'intervalle $\left[\text{Log}\,\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$.
   Démontrer que g est une bijection de cet intervalle sur un intervalle U que l'on précisera.
   Calculer le réel $g^{-1}(x)$ en fonction du réel x appartenant à U.
3. Soit D l'ensemble des points dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient

   $$f(x) \leqslant y \leqslant 0.$$

   Calculer l'aire de D.
4. À l'aide de la fonction f, calculer la limite de la suite (S_n) définie par

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\text{Log}\,2}{n}\left(2^{\frac{2k}{n}} - 3 \times 2^{\frac{k}{n}} + 2\right).$$