Durée : 4 heures

Baccalauréat C Nice juin 1970

EXERCICE 1

On considère la fonction f qui, à tout réel x de l'intervalle $\mathrm{I} = [0\,;\,1]$, associe le nombre

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}.$$

1. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque, φ, définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$. Construire, dans un même repère orthonormé, $\mathrm{O}xy$, les graphes des fonctions f et φ.
2. Calculer l'aire du domaine limité par le graphe de la fonction f, l'axe $x'x$ et la droite d'équation $x = 1$, ainsi que l'aire du domaine limité par les graphes des fonctions f et φ.

EXERCICE 2

On considère l'équation en Z à coefficients complexes

$$Z^3 - (3+4\mathrm{i})Z^2 - 4(1-3\mathrm{i})Z + 12 = 0.$$

1. Montrer qu'elle admet une racine réelle, a, dont on calculera la valeur numérique.
2. Montrer que $(Z-a)$ peut être mis en facteur dans le premier membre de l'équation et résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$.

EXERCICE 3

A

L'espace est rapporté à un. repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$. On considère les points A, de coordonnées $(+1\,;\,0\,;\,0)$, et B, de coordonnées $(0\,;\,+1\,;\,0)$.
A À tout point M de coordonnées $(X\,;\,Y\,;\,Z)$ on associe, s'il existe, le point m tel que

$$X\overrightarrow{m\mathrm{A}} + Y\overrightarrow{m\mathrm{B}} + Z\overrightarrow{m\mathrm{O}} = \overrightarrow{0}.$$

1. Trouver l'ensemble des points M qui n'ont pas d'associé.
   Dans le cas où M a un associé, m, on note $m = g(M)$. Déterminer alors les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ de m en fonction de celles de M et trouver l'ensemble des points M qui ont une image donnée, m.
2. On restreint la transformation g à l'ensemble des points M du plan (P) d'équation $X + Y + Z = 1$.
   On note g_1 cette nouvelle application. Quelle est la nature de g_1 ?
3. Quelle est la nature de la transformée (γ) par g_1 de l'intersection, (Γ), du plan (P) et de la sphère de centre O et de rayon 1 ?
   La courbe (γ) admet un centre de symétrie, dont on déterminera les coordonnées.

Partie B

On considère la transformation ponctuelle T qui, à tout point M de l'espace, de coordonnées (X ; Y ; Z), associe le point M', de coordonnées $\left(X'\,;\,Y'\,;\,Z'\right)$, tel que

$$X' = Z, \quad Y' = X \quad \text{et} \quad Z' = Y.$$

1. Montrer que la transformation T est une bijection de l'espace sur lui-même, admettant une droite de points doubles, (Δ).
2. Montrer que, pour tout point M la droite MM' est orthogonale à (Δ) et que tout plan perpendiculaire à (Δ) est globalement invariant par T.
3. On se propose de déterminer la nature de T. À cet effet, on prend pour nouveau repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath_1}, \overrightarrow{\jmath_1}, \overrightarrow{k_1}\right)$ défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl}\overrightarrow{\imath_1} & = & \frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{\imath} - \frac{2}{\sqrt{6}}\overrightarrow{\jmath} + \frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{k},\\ \overrightarrow{\jmath_1} & = & \frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{\imath} - \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{k},\\ \overrightarrow{k_1} & = & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + \overrightarrow{k}\right).\end{array}\right.$$

   Vérifier que ce nouveau repère est orthonormé. On admettra qu'il est de sens direct.

   Dans ce nouveau repère, on note $\left(x_1~;~y_1~;~z_1\right)$ les coordonnées de M et $\left(x_1'~;~y_1'~;~z_1'\right)$ celles de M'.

   Calculer $x_1',~y_1',~z_1'$ en fonction de $x_1,~y_1$ et z_1. En déduire que T est une rotation dont l'axe, passant par O, admet $\overrightarrow{k_1}$ pour vecteur directeur et dont on précisera l'angle.

Partie C

À tout point M du plan (P) on associe le point $m = g_1(M)$ et le point $M' = T(M)$. On note $m' = g_1\left(M'\right)$.

1. Montrer que, si $(x~;~y~;~z)$ sont les coordonnées de m et $(x'~;~y'~;~z')$ celles de m', on a

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{lcl}x' & = & -x-y+1,\\ y' & = & x,\\ z' & = & z=0.\end{array}\right.$$

   Ces relations (1) définissent une transformation, S, du plan d'équation $z = 0$ dans lui-même.

   Montrer que S est bijective et admet un point double, ω.
2. Montrer sans calcul que la courbe (γ), définie dans la question A, 3., est globalement invariante par S.
3. Soit (D) et (D$'$) les droites passant par ω et de pentes respectives -1 et -2.

   Montrer que S s'obtient en composant, dans l'ordre, la symétrie par rapport à (D) avec l'affinité de direction (D$'$), de rapport -1 et dont l'axe est la parallèle à l'axe Ox passant par ω.

N.B. - La question C ne fait intervenir de la question B que la définition de la transformation T.