Baccalauréat C Nice juin 1973

EXERCICE 1

Soit f la fonction de $]-1\ ;\ +1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(0) & = & 0 \\ f(x) & = & x\text{Log}\,\dfrac{1}{|x|} \quad \text{si } x \neq 0 \end{array}\right.$$

où Log désigne le Logarithme népérien.

1. f est-elle continue au point $x = 0$?
2. Étudier les variations de f et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
   Donner une équation de la tangente au point A d'abscisse 1.
3. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de f. En déduire l'aire du domaine défini par

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & x & \leqslant & 1 \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x) \end{array}\right.$$

EXERCICE 2

Une urne contient sept boules rouges et trois boules blanches.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ? Une boule rouge ?
2. Une épreuve consiste à tirer successivement 4 boules avec remise dans l'urne après chaque tirage. On considère la variable aléatoire (ou aléa numérique) X qui associe à toute épreuve le nombre de boules blanches tirées.
   a. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ?
   b. Étudier la fonction de répartition de X ?
   c. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

N. B. : On suppose que la probabilité de tirer une boule est la même pour chaque boule.

PROBLÈME

Partie A

Dans le plan affine $\mathcal{E}_2$ rapporté à un repère $\mathcal{R} = \left(\text{O}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points

$$\text{A}(2\ ;\ 0),\quad \text{B}(0\ ;\ 1),\quad \text{O}'(1\ ;\ -2),\quad \text{A}'(1\ ;\ a),\quad \text{B}'(-1\ ;\ -2)$$

où a désigne un nombre réel.

1. Soit M un point de coordonnées x et y dans le repère :Il . Calculer les coordonnées α et β de M dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right)$ en fonction de x et y.
   Au point M de $\mathcal{E}_2$ on associe le point M' de $\mathcal{E}_2$ tel que :

$$\overrightarrow{\text{O}'\text{M}'} = \alpha\overrightarrow{\text{O}'\text{A}'} + \beta\overrightarrow{\text{O}'\text{B}'}$$

   Calculer les coordonnées x' et y' de M' dans le repère $\mathcal{R}$ en fonction de x et y.

Montrer que l'application F de $\mathscr{E}_2$ dans $\mathscr{E}_2$ définie par $M' = F(M)$ est une application affine. Quelle est, dans la base $\left(\overrightarrow{\jmath}\,,\ \overrightarrow{k}\right)$, la matrice de l'application linéaire associé à F ?

Comment choisir a pour que F soit bijective ? Quelle est l'image de $\mathscr{E}_2$ par F dans le cas où F n'est pas bijective ?

2. On suppose $\mathscr{E}_2$ euclidien orienté et le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\jmath}\,,\ \overrightarrow{k}\right)$ orthonormé direct. On appelle affixe d'un point M de $\mathscr{E}_2$ de coordonnées x et y le nombre complexe $z = x + \text{i}y$. Déterminer a pour que F soit une similitude directe.

Calculer dans ce cas l'affixe de $F(M)$ en fonction de celle de M. Déterminer le centre, le rapport et l'angle de cette similitude.

Partie B

Soit le plan euclidien orienté $\mathscr{E}_2$ muni du repère orthonormé direct $\mathscr{R} = \left(\text{O},\ \overrightarrow{\jmath}\,,\ \overrightarrow{k}\right)$.
On considère l'application g de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$z' = g(z) = 2\text{i}z + 1 - 2\text{i}.$$

On note T l'application de $\mathscr{E}_2$ dans $\mathscr{E}_2$ qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = g(z)$.

1. Calculer les coordonnées de $T(M)$ en fonction des coordonnées de M dans le repère $\mathscr{R}$.

Montrer que T est bijective et exprimer les coordonnées de M en fonction de celles de $T(M)$.

Montrer que T admet un seul point fixe H. Quel est le transformé O$'$ de O par T ?

2. Donner, dans le repère $\mathscr{R}$, une équation de l'ellipse $(\mathscr{E})$ de centre O, d'excentricité $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ et telle que H soit un sommet de son axe focal.

Montrer que l'image $\left(\mathscr{E}'\right)$ de $(\mathscr{E})$ par T est une ellipse dont on précisera les foyers et l'excentricité.

3. On considère la symétrie orthogonale S par rapport à la droite OO$'$. Calculer les coordonnées de $S(M)$ en fonction de celles de M dans le repère $\mathscr{R}$.

Calculer l'affixe de $S(M)$ en fonction du conjugué de l'affixe de M.

On pose $T' = S \circ T$.

Calculer l'affixe de $T'(M)$ en fonction du conjugué de l'affixe de M. Montrer que T' est une similitude indirecte dont on déterminera le centre et le rapport.

N. B. : Les parties A et B du problème sont indépendantes.