Durée : 4 heures

Baccalauréat C 1980 Nice

EXERCICE 1

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation d'inconnues $(x,\ y)$,

$$5x - 3y = 2.$$

2. Un entier naturel A s'écrit $\overline{55}$ en base x et $\overline{37}$ en base y.
   Quelles sont les valeurs possibles de x et y ? Déterminer x et y sachant de plus qu'il existe un entier naturel B qui s'écrit $\overline{121}$ en base x et $\overline{59}$ en base y.
3. Écrire A et B dans le système décimal.

EXERCICE 2

Soit $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes ; on considère l'application f de $\mathbb{C} - \{1\}$ vers lui-même, telle que

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{1\}, \quad f(z) = \frac{z - 2\text{i}}{z - \text{i}}.$$

1. Montrer que f est une involution de $\mathbb{C} - \{1\}$.
2. Trouver l'ensemble des $z \in \mathbb{C} - \{1\}$, invariants par f.

PROBLÈME

Soit $\mathscr{E}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications ,continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit f un élément de $\mathscr{E}$. On désigne par $u(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$u(f) : x \longmapsto \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Partie A

1. Montrer que, pour toute fonction f de $\mathscr{E}$, la fonction $u(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est

$$x \longmapsto f(x+1) - f(x).$$

2. Montrer que $u(f)$ appartient à $\mathscr{E}$ si f appartient à $\mathscr{E}$, et que l'application u : $f \longmapsto u(f)$ est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.
   Donner un exemple de fonction de $\mathscr{E}$ qui n'est pas dans l'image de u.
3. Soit α un réel, et soit c_α la fonction $x \longmapsto \cos \alpha x$.
   Calculer $u(c_\alpha)$ et déterminer l'ensemble des réels α tels que c_α appartienne au noyau de u.
4. Soit g une fonction de $\mathscr{E}$, périodique de période 1, et vérifiant

$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

   a. Calculer la dérivée de $u(g)$.
   b. En déduire que g appartient au noyau de u.

5. Soit s un réel. Montrer que la droite vectorielle de $\mathcal{E}$ engendrée par la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{sx}$ est globalement invariante par u. Déterminer la restriction de u à cette droite (on distinguera les cas $s = 0$ et $s \neq 0$).

Partie B

Soit α un réel non nul. On désigne par E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ engendré par les fonctions

$$c_\alpha : x \longmapsto \cos \alpha x \quad \text{et} \quad s_{.\alpha} : x \longmapsto \sin \alpha x.$$

1. Montrer que $(c_\alpha,\ s_\alpha)$ est une base de E.

2. **a.** Montrer que l'image $u(\mathrm{E})$ de E par u est contenue dans E.

b. Écrire la matrice de la restriction $\overline{u}$ de u à E dans la base $(c_\alpha,\ s_\alpha)$.

3. On munit E de la structure d'espace vectoriel euclidien orienté pour laquelle la base $(c_\alpha,\ s_\alpha)$ est orthonormée directe. Montrer que u est la composée d'une homothétie vectorielle dont on précisera le rapport et d'une rotation vectorielle dont on précisera l'angle.

Partie C

1. Soit ℓ_1 un nombre réel, et soit f une fonction de $\mathcal{E}$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f = \ell_1$. Montrer, en revenant à la définition, que l'on a aussi $\lim\limits_{+\infty} u(f) = \ell_1$.

On remarquera que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \ell_1 = \int_x^{x+1} [f(t) - \ell_1]\,\mathrm{d}t.$$

2. Vérifier rapidement de façon analogue que si $\lim\limits_{-\infty} f = \ell_2$, alors $\lim\limits_{-\infty} u(f) = \ell_2$.

3. On choisit pour f la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

a. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et calculer ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

b. Étudier la fonction $u(f)$ et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé.