Durée : 4 heures

Baccalauréat C Nice juin 1969

Exercice 1

Étant donné, dans un plan, quatre points, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et ω_4, soit Q l'ensemble des suites de quatre points, A, B, C et D, telles que $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et ω_4 soient respectivement les milieux des segments AB, BC, CD et DA.
Quel est l'ensemble des points A pour lesquels il existe des points B, C et D tels que

$$(\text{A, B, C et D}) \in \text{Q} ?$$

Exercice 2

Dans l'ensemble des polynômes à coefficients réels d'une variable x, on considère les cinq polynômes $A_0, A_1, \ldots, A_4$ définis par

$$\begin{aligned}
&A_0(x) = 1, \quad A_1(x) = x-1,\\
&A_2(x) = (x-1)(x-2),\\
&A_3(x) = (x-1)(x-2)(x-3),\\
&A_4(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4).
\end{aligned}$$

1. Montrer que tout polynôme P qui possède un degré inférieur ou égal à 4 admet une expression, et une seule, de la forme

   $$P = a_0.A_0 + a_1.A_1 + a_2.A_2 + a_3.A_3 + a_4.A_4,$$

   dans laquelle les coefficients a_i sont des constantes réelles (pour $i = 0, 1, 2, 3, 4$).
2. On choisit en particulier le polynôme P défini par

   $$P(x) = x^4.$$

   Calculer les cinq coefficients ai qui correspondent à ce polynôme.

N. B. - On conseille de les calculer l'un après l'autre dans l'ordre des indices croissants, en utilisant successivement les valeurs numériques $x = 1$, 2, 3, 4, 5.

Problème

Le plan est rapporté à un repère $x'\text{O}x, y'\text{O}y$.
Dans l'ensemble, E, des points du plan, on définit la loi de composition interne $\star$ qui, au couple M, M', fait correspondre le point $P : M \star M' = P$.
Les coordonnées de M et M' étant respectivement $(x\,;\,y)$ et $(x'\,;\,y')$, celles de P sont $(xx'\,;\,xy' + y)$ et l'on pose

$$(x, y) \star (x'\,;\,y') = (xx'\,;\,xy' + y).$$

Partie A

1. Montrer que la loi $\star$ est associative et que A = $(+1\,;\,0)$ est élément neutre.
   Tout point du plan admet-il un symétrique pour la loi $\star$?
   Prouver que l'ensemble, E′, des points $(x\,;\,y)$ de E tels que $x \neq 0$ est un groupe pour cette loi.

2. On se donne dans E$'$ le point $M_0\left(x_0\ ;\ y_0\right)$. Trouver les points $M(x\ ;\ y)$ qui commutent avec M_0.

Montrer que les points A, M_0 et M sont alignés.

Quels sont les points M tels que M soit son propre symétrique pour la loi $\star$?

Partie B

1. À chaque point M de E$'$ on associe le point M' défini par $M \star M' = \text{A}$.

Montrer, sans nouveaux calculs, que cette transformation est involutive et que M et M' sont alignés avec A.

2. Écrire les formules de cette transformation.

Démontrer que les projections de M et M' sur l'axe $x'\text{O}x$, faites parallèlement à Oy, forment une division harmonique avec deux points fixes, que l'on précisera.

Le point M étant donné, indiquer une construction géométrique du point M' à partir de A.

Partie C

Soit $\text{B}\left(x_0\ ;\ y_0\right)$ un point donné dans E$'$ (on étudiera, dans ce qui suit, le cas où AB n'est pas parallèle à Oy, $x_0 \neq 1$).

1. La relation $M_1 = M\star$ B définit une transformation ponctuelle de E dans E, soit g_{B} on notera

$$M_1 = g_{\text{B}}(M).$$

a. Trouver les points invariants de g_{B}. Quelle est l'image du point A par g_{B} ?

Comparer les vecteurs $\overrightarrow{MM_1}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}$.

La droite MM_1 coupe Oy au point α. Évaluer le rapport du vecteur $\overrightarrow{\alpha M_1}$ au vecteur $\overrightarrow{\alpha M}$.

Caractériser géométriquement g_{B} à l'aide de la droite $y'\text{O}y$ et des points A et B.

b. C étant un autre point de E$'$, tel que AC ne soit pas parallèle à Oy, démontrer que $g_{\text{C}} \circ g_{\text{B}} = g_{\text{B}\star\text{C}}$. (on rappelle que $g_{\text{C}} \circ g_{\text{B}}$ est l'application composée, ou bien le produit, de g_{B} et g_{C} prises dans cet ordre).

Dans quel cas le produit de deux affinités d'axe $y'\text{O}y$ est-il une affinité d'axe $y'\text{O}y$?

2. La relation $M_2 = B \star M$ définit une transformation ponctuelle de E dans E, soit f_{B} ; on notera

$$M_2 = f_{\text{B}}(M).$$

a. Trouver le point invariant de f_{B}.

Montrer que f_{B} est une homothétie.

Quelle est l'image de A par f_{B} ?

Caractériser géométriquement les éléments de l'homothétie à partir des points A, B et de l'axe $y'\text{O}y$.

b. Démontrer la relation $f_{\text{B}} \circ f_{\text{C}} = f_{\text{B}\circ\text{C}}$.

Dans quel cas le produit de deux homothéties de centres situés sur $y'\text{O}y$ est-il une homothétie de centre situé sur $y'\text{O}y$?

c. Soit F l'ensemble des transformations f_{B}, où B décrit E$'$.

Montrer que l'application de E$'$ dans F qui à B associe f_{B} est une bijection et que les ensembles E$'$ et F, munis respectivement des lois $\star$ et $\circ$, sont isomorphes.