Baccalauréat C Nice juin 1974

EXERCICE 1

1. Soit g la fonction de la variable réelle x définie par

$$g(x) = \text{e}^x - 1 - x\text{e}^x.$$

Montrer que g admet un maximum absolu pour $x = 0$ et en déduire que $g(x)$ est négatif ou nul pour tout x réel.

2. Soit f la fonction de la variable réelle x définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & \dfrac{x}{\text{e}^x - 1} \quad \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & = & 1 \end{array}\right.$$

a. Montrer que f est continue pour $x = 0$.

b. Étudier les variations de f.

c. Montrer que la représentation graphique de f admet pour asymptotes les droites d'équations $y = -x$ et $y = 0$.

d. Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé,

EXERCICE 2

Etant données 3 urnes contenant chacune 5 boules numérotées respectivement 1, 2, 3, 4 et 5, on tire au hasard une boule de chaque urne, toutes les boules de chaque urne ayant la même probabilité d'être tirées.
Évaluer les probabilités :

1. pour que le numéro 5 ne sorte pas dans le tirage ;

2. pour que les trois numéros tirés soient inférieurs ou égaux à 3 ;

3. pour que le plus grand numéro du tirage soit 4.

PROBLÈME

Toutes les questions sont indépendantes
On désigne par $\mathcal{V}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et par E un espace affine euclidien associé à $\mathcal{V}$ et rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$; $\mathcal{B} = \left(\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ est donc une base orthonormé de $\mathcal{V}$.

Soit $\mathcal{M}$, l'ensemble des matrices 2×2 de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ b & a \end{pmatrix}$, a, b, c étant réels.

1. Démontrer que $\mathcal{M}$ muni de l'addition des matrices 2×2, a une structure de groupe commutatif.

2. Soit A l'élément de $\mathcal{M}$, tel que $a = 2$, $b = 3$ et $c = -4$.

On désigne par g l'application affine de E dans E laissant O invariant et admettant pour endomorphisme associé l'application linéaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ de matrice A dans la base $\mathcal{B}$.

Démontrer que g est bijective et que l'image par g d'une droite quelconque de E est toujours une droite. Trouver une équation cartésienne de l'image par g de la droite D d'équation $3x - 4y + 1 = 0$.

3. Le réel k non nul étant fixé, on considère l'ensemble T_k des applications linéaires bijectives de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}$ (ou automorphismes de $\mathcal{V}$) dont les matrices dans la base $\mathcal{B}$ sont les éléments de $\mathcal{M}$, tels que $c = kb$. La loi $\circ$ de composition des applications donne-t-elle à T_k une structure de groupe ?

4. Soit ℓ un endomorphisme non bijectif de $\mathcal{V}$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est un élément de $\mathcal{M}$. On suppose $a \neq 0$.

a. Préciser le noyau L et l'image L' de ℓ.

b. Montrer qu'il existe un endomorphisme orthogonal s de $\mathcal{V}$, indépendant de a, b, c, tel que $L' = s(L)$.

5. On désigne par f l'application affine de E vers E, laissant O invariant et associée à l'endomorphisme de $\mathcal{V}$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} a & c \\ b & a \end{pmatrix}$.

En supposant que f est bijective, montrer que l'image par f de tout cercle est un cercle si, et seulement si, a, b, c vérifient les deux relations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a(b+c) & = & 0 \\ b & = & \pm c \end{array}\right.$$

Montrer que f est alors une similitude. Préciser les cas où elle est directe, indirecte.