

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Nice juin 1976 ∞

EXERCICE 1

- On considère l'entier naturel n qui s'écrit $\overline{53x4}$ dans le système de numération de base huit. Déterminer x de telle sorte que :
 - n soit divisible par 7 ;
 - n soit divisible par 6.En déduire qu'il existe x tel que n soit divisible à la fois par 6 et par 7.
- On prend $x = 2$. Déterminer l'écriture décimale de n .
Quel est le nombre de diviseurs de n dans \mathbb{N} ?
Trouver le plus petit nombre entier naturel non nul par lequel il faut multiplier n pour que le produit soit un carré.

EXERCICE 2

On considère l'équation

$$z \in \mathbb{C}, \quad z^2 + (-6 + i)z + 7 + 3i = 0$$

- Résoudre l'équation.
- On appelle z_1 la solution dont une détermination de l'argument est $\frac{\pi}{4}$ et z_2 l'autre solution.
Soit P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. Soit \tilde{s} la similitude directe de P qui, au point d'affixe -2 , associe le point d'affixe 1 et, au point d'affixe z_1 , associe le point d'affixe z_2 . Déterminer le centre, l'angle et le rapport de \tilde{s} .

PROBLÈME

Partie A

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension deux. On donne un vecteur non nul \vec{u} de E , et une application linéaire de E dans \mathbb{R} (forme linéaire) φ telle que $\varphi(\vec{u}) \neq 0$.

- Démontrer que le noyau de φ est de dimension un.
- On définit une application f de E dans E par

$$f: \begin{array}{l} E \rightarrow E \\ \vec{v} \mapsto \vec{v} + \varphi(\vec{v}) \cdot \vec{u} \end{array}$$

Démontrer que f est une application linéaire et que l'ensemble des vecteurs de E invariants par f est une droite vectorielle. Soit D la droite vectorielle engendrée par \vec{u} . Montrer que $f(D) \subset D$.

- Démontrer que f admet une application réciproque si, et seulement si, $\varphi(\vec{u}) \neq -1$ et que f est involutive si, et seulement si, $\varphi(\vec{u}) = -2$.

4. On suppose que E est euclidien et que $\|\vec{u}\| = 1$. On considère (\vec{u}, \vec{u}') base orthonormée de E . On suppose que φ vérifie $\varphi(\vec{u}) = -2$ et $\varphi(\vec{u}') = 0$.
Déterminer la matrice de f dans la base (\vec{u}, \vec{u}') . En déduire la nature de f .
5. Soit \mathcal{E} un espace affine sur l'espace vectoriel E , et A un point de \mathcal{E} . On considère l'application

$$F: \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{E} \\ M & \mapsto & M' \end{array}$$

où M' est défini par $\overrightarrow{MM'} = \varphi(\overrightarrow{AM}) \cdot \vec{u}$.

Démontrer que F est une application affine. Quelle est l'application linéaire associée?

Partie B

On rappelle que l'ensemble des fonctions numériques définies sur \mathbb{R} , noté $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, muni des lois habituelles (addition et multiplication par un réel), est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Soit E l'ensemble des fonctions $f_{a,b}$ appartenant à $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $(a; b)$ parcourant \mathbb{R}^2 , définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,b}(x) = axe^{-x} + \frac{be^x}{e^x + 1}.$$

- Démontrer que E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 2.
- Soit P un plan affine euclidien et $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de P .
Étudier $f_{0,1}$ et tracer sa courbe représentative C dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Démontrer que $f_{0,1}$ admet une fonction réciproque définie sur un intervalle que l'on précisera, continue et strictement croissante sur cet intervalle. Exprimer cette fonction réciproque $f_{0,1}^{-1}$.
- Démontrer que, pour tout entier n positif :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{1,0}^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}(x-n),$$

$f_{1,0}^{(n)}$ désignant la fonction dérivée n -ième de $f_{1,0}$.

4. Soit
- $$\varphi: \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ f_{a,b} & \mapsto & \int_0^{\text{Log} 2} f_{a,b}(x) dx \end{array}$$

Soit $f_{\alpha,\beta}$ une fonction appartenant à E telle que

$$(\alpha, \beta) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad \varphi(f_{\alpha,\beta}) \neq 0.$$

On considère

$$f: \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & E \\ f_{a,b} & \mapsto & f_{a,b} + \varphi(f_{a,b}) \cdot f_{\alpha,\beta} \end{array}$$

Démontrer que f est involutive si et seulement si :

$$\frac{\alpha}{2}(1 - \text{Log} 2) + \beta \text{Log} \frac{3}{2} + 2 = 0.$$