∽ Baccalauréat C Nice juin 1978 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Trouver toutes les paires d'entiers naturels a et b tels que l'on ait :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\text{pgcd}/:(a\,;\,b) & = & 42\\ \text{ppcm}\,(a\,;\,b) & = & 1\,680\end{array}\right.$$

2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que

$$8x = 7 \quad (\text{modulo}\,5)$$

3. Résoudre l'équation :

$$(x\,;\,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, \quad 336x + 210y = 294.$$

La deuxième question fournira une solution particulière de l'équation simplifiée.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

1. Soit s, la transformation du plan complexe dans lui-même, qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z', définie par :

$$z' = (1+\text{i})z + 3\text{i}$$

Déterminer la nature de s et les éléments géométriques qui la caractérisent.

2. Soit O l'origine du repère. On considère la rotation r de centre O et de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$. On pose : $f = r \circ s$.
Déterminer la nature de f et les éléments géométriques qui la caractérisent. Quelle est l'image par f du point A d'affixe -3 ?

PROBLÈME **12 POINTS**

N. B. - La partie A est indépendante des parties B et C et la partie C peut être traitée en utilisant le dernier résultat de B
Dans tout le problème a est un nombre réel donné strictement positif.

Partie A

Soit f_a la fonction définie pour tout réel x par

$$f_a(x) = (a-x)\text{e}^x$$

et soit $\mathscr{C}_a$ a sa représentation graphique dans un plan P rapporté à un repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les variations de la fonction f_a. Montrer que f_a a un maximun pour une valeur x_a que l'on déterminera.
Soit M_a le point de coordonnées $\left(x_a\,;\,f\left(x_a\right)\right)$. Quel est l'ensemble des points M_a quand a décrit $\mathbb{R}_+$. Le construire dans P.
2. En déduire le tableau de variations et la représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de f_1.

Partie B

1. Par une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_0^a t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = a\mathrm{e}^a - \int_0^a \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que :

$$\mathrm{e}^a = 1 + a + \int_0^a (a-t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On pose :

$$I_n = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{n!}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que $I_n = \dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

3. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{e}^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!} + I_n$$

4. a. Démontrer que $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{a^n}{n!}\left(\mathrm{e}^a - 1\right)$.

b. On pose $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$ on a $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}u_n$.
En déduire que, pour tout $n \geqslant n_0$

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n_0}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}.$$

c. En déduire les limites de u_n et de I_n quand n tend vers $+\infty$ et montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}\right) = \mathrm{e}^a.$$

Partie C

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
On définit A^npar $A^1 = A$ et $A^n = A^{n-1} \times A$ pour $n \geqslant 2$.

1. Calculer A^2, A^3, A^4. En déduire par récurrence A^n en fonction de n.

2. Soit $B_n = \mathrm{I} + A + \dfrac{1}{2!}A^2 + \cdots + \dfrac{1}{n!}A^n$, où $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pose $B_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \gamma_n \\ \beta_n & \delta_n \end{pmatrix}$. Expliciter α_n, γ_n, β_n, δ_n.

Montrer que les suites (α_n), (β_n), (γ_n), (δ_n) ont des limites, que l'on déterminera, quand n tend vers $+\infty$?