Baccalauréat C Nice juin 1979

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On considère la fonction numérique d'une variable réelle f définie par

$$f(x) = \log\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

où log désigne le logarithme népérien.

1. Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. (On donne $\log 2 \approx 0,7$).
2. Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{\text{Log}(2+x) - \text{Log}\,2}{x}$ admet pour limite $\dfrac{1}{2}$ en 0.
3. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ de la portion du plan comprise entre la courbe $(\mathscr{C})$, la droite d'équation $y = \text{Log}\,2$, et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = \lambda$ où λ est un nombre réel strictement inférieur à -1.

   Déterminer la limite éventuelle de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand λ tend vers $-\infty$.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

$\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes et A le point du plan complexe d'affixe $z = a+\text{i}b$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$).
On considère l'équation :

$$z^2 + (1-b)z + a = 0.$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b, pour que l'équation admette une racine double.

   Représenter dans le plan complexe l'ensemble (Γ) des points A (d'affixe $a+\text{i}b$) correspondants.
2. Préciser suivant le position du point A dans le plan la nature des racines de l'équation.

PROBLÈME **13 POINTS**

Partie A

Soit a, b, c trois nombres réels. On note f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + b\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + c.$$

1. **a.** Démontrer par récurrence que

   $$\forall n \in N^{\star}, \forall x \in \mathbb{R},~ f^{(n)}(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \left[a\cos\left(\frac{\pi}{2}x + n\frac{\pi}{2}\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{2}x + n\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

   sachant que $f^{(n)}$ désigne la fonction dérivée n-ième de f.

   b. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}, u_n = \dfrac{1}{4^n} f^{(2n)}(0)$.

   Calculer u_1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in N^{\star}}$, est une suite géométrique de raison $-\dfrac{\pi^2}{16}$.
   Calculer, si elle existe, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$ en fonction de a.

2. On pose $a = 4\alpha$, $b = 7\beta$, $c = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Écrire l'expression de $f(x)$.

Déterminer l'ensemble des couples $(\alpha,\ \beta)$ appartenant à $\mathbb{Z}^2$ tels que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

3. On pose $a = 1$, $b = c = 0$ et on note φ la restriction de f à $[0\,;\,2]$. Écrire l'expression de $\varphi(x)$.

a. Montrer que φ admet une fonction réciproque ψ.

b. Quel est l'ensemble de définition de ψ ? Préciser son sens de variation et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

c. Sur quel ensemble ψ est-elle dérivable ?

4. On pose $a = c = 0$, $b = 1$. Écrire l'expression de $f(x)$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

5. On appelle f_1 la fonction f obtenue pour $a = 1$, $b = c = 0$.

On appelle f_2 la fonction f obtenue pour $a = c = 0$, $b = 1$. On considère

$$S_1 = \sum_{k=0}^{4} f_1\left(\frac{4k}{9}\right) \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=0}^{4} f_2\left(\frac{4k}{9}\right).$$

a. Exprimer $S_1 + \mathrm{i}S_2$ en fonction du nombre complexe z de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{9}$.

b. En déduire S_1.

Partie B

On note E l'ensemble des fonctions $f_{a,\,b,\,c}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{a,\,b,\,c}(x) = a\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + c$$

avec $(a,\ b,\ c)$ appartenant à $\mathbb{R}^3$.

1. On rappelle que l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Cet ensemble sera noté $\mathscr{F}$.

a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}$.

b. Déterminer la dimension de E.

2. On note $f \bullet g$ le réel $\dfrac{1}{4}[2f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(-1)g(-1)]$.

a. Montrer que l'application : $\begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (f,\ g) & \longmapsto & f \bullet g \end{array}$ est un produit scalaire sur E.

Dans toute la suite, on considérera E muni de ce produit scalaire ; le réel $\sqrt{f \bullet f}$ sera noté $\|f\|$.

b. Soit les fonctions :

$$e_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \qquad e_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \end{array}$$

$$e_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 1 \end{array}$$

Montrer que $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ est une base orthonormée de E.

Montrer que :

$$f_{a,\,b,\,c} = \left(\frac{a}{2} + c\right) e_1 + \frac{b\sqrt{2}}{2} e_2 - \frac{a}{2} e_3.$$

En déduire que :

$$f_{a,\,b,\,c} \bullet f_{a',\,b',\,c'} = \left(\frac{a}{2} + c\right)\left(\frac{a'}{2} + c'\right) + \frac{bb'}{2} + \frac{aa'}{4}.$$

3. On suppose que E est orienté et que $(e_1,\, e_2,\, e_3)$ est une base orthonormée directe.
Soit τ l'endomorphisme de E défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl} \tau\,(e_1) & = & f_{0,\,0,\,1} \\ \tau\,(e_2) & = & f_{-1,\,\frac{\sqrt{6}}{2},\,\frac{1}{2}} \\ \tau\,(e_3) & = & f_{-\sqrt{3},\,-\frac{\sqrt{2}}{2},\,\frac{\sqrt{3}}{2}} \end{array}\right.$$

Montrer que τ est une isométrie vectorielle dont on déterminera la nature et les éléments caractéristiques.

4. Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(\mathscr{R})$.
Déterminer l'ensemble Γ des points M de coordonnées $(x\,;\, y)$ dans $(\mathscr{R})$ tels que les vecteurs $f_{y,\,x,\,1}$ et $f_{2y,\,\frac{2}{3}x,\,-\frac{y}{2}}$ de E soient orthogonaux.
Représenter cet ensemble dans $(\mathscr{R})$.