

Baccalauréat C Nice juin 1983

EXERCICE 1

4 POINTS

Dans le plan affine euclidien (P), on donne un triangle équilatéral ABC tel que

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CA}\| = 1.$$

Soit A' le milieu du segment [BC].

1. Montrer que le milieu G du segment [AA'] est le barycentre de A, B, C, respectivement affectés des coefficients 2, 1, 1.
2. Soit h l'application de (P) dans (P) qui, à tout point M de (P), associe le point M' de (P) tel que :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}.$$

Montrer que h est une homothétie affine dont on précisera le centre et le rapport.

Calculer $2GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Trouver l'ensemble des points N de (P) tels que :

$$2NA^2 + NB^2 + NC^2 = 2.$$

EXERCICE 2

4 POINTS

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation :

$$11x - 6y = 8.$$

2. Une variable réelle X ne prend que les valeurs -2, 1, 3, avec les probabilités respectives :

$$A = \frac{x}{16}, \quad B = \frac{3x - y}{16} \quad \text{et} \quad C = \frac{18x - 11y}{16}.$$

Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers (x ; y) tel que ces coordonnées soient acceptables.

Calculer alors l'espérance mathématique et la variance de X.

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A

Soit U la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U(x) = x^2 e^{-x^2}.$$

1. Étudier U et tracer la courbe représentative de U dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 6 cm).
2. Soit r la restriction de U à l'intervalle $J = [1; +\infty[$.
 - a. Montrer que r est une bijection de I sur l'intervalle $J = \left]0; \frac{1}{e}\right]$.

- b. On désigne par r^{-1} la bijection réciproque de r (on n'explicitera pas r^{-1}). Représenter graphiquement r^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- c. Étudier la dérivabilité de r^{-1} sur J .

Partie B

Dans toute la suite, E désigne l'espace vectoriel des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} muni de l'addition des fonctions et de la multiplication des fonctions par un réel.

On note φ l'application de E dans E qui, à f élément de E , associe $F = \varphi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)e^{-t^2} dt.$$

- Montrer que φ est un endomorphisme de E .
- Montrer que, pour toute fonction f de E , F est dérivable sur \mathbb{R} et en 0; exprimer $F'(x)$ en fonction de $f(x)$.
En déduire que φ est injectif.
- a. Soit g une fonction de E , qui s'annule en 0, dérivable sur \mathbb{R} à dérivée continue. On désigne par h la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = g'(x)e^{x^2}$$

Montrer que $\varphi(h) = g$; en utilisant les résultats des questions 2. et 3. a, caractériser l'image de φ .

- b. Déterminer les antécédents des fonctions U, V, W définies sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U(x) = x^2 e^{-x^2}; \quad V(x) = e^{-x^2}; \quad W(x) = x e^{-x^2}.$$

4. Soit \mathcal{P}_2 le sous-espace vectoriel de E dont une base est (f_0, f_1, f_2) ; f_0, f_1, f_2 sont définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_0(x) = 1; \quad f_1(x) = x; \quad f_2(x) = x^2.$$

- Montrer que $(f_0, 2f_1, f_0 - 2f_2)$ est une base de \mathcal{P}_2
- En déduire que $(\varphi(f_0), V, W)$ est une famille libre de $\varphi(\mathcal{P}_2)$. Montrer que $(\varphi(f_0), V, W)$ est une base de \mathcal{P}_2 (On ne calculera pas $\varphi(f_0)$).

Partie C

Pour n entier naturel et x réel, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t^2} dt \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } I_0 = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

- a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier supérieur ou égal à 2 et tout réel x on a l'égalité :

$$(n-1)I_{n-2}(x) - 2I_n(x) = x^{n-1}e^{-x^2}.$$

- Calculer $I_1(x)$; en déduire $I_3(x)$.
 - Calculer $I_2(x)$ en fonction de $I_0(x)$ que l'on ne calculera pas.
2. On désire prouver qu'il existe un réel A tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq I_0(x) \leq A.$$

a. Montrer que la fonction, définie sur \mathbb{R}_+^* par $x \mapsto I_0(x)$ est croissante et positive.

b. Montrer que : $I_0(x) - I_0(1) = \int_1^x e^{-t^2} dt$

c. Montrer que :

$$\forall t \in [1; +\infty[, \quad e^{-t^2} \leq e^{-t}.$$

En déduire que :

$$\forall x \in [1; +\infty[, \quad I_0(x) - I_0(1) \leq \frac{1}{e} - e^{-x} \leq \frac{1}{e}.$$

d. Trouver alors un réel A tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad I_0(x) \leq A.$$

3. Déduire des questions 1. c et 2. d que l'aire de la portion de plan comprise entre les droites d'équations respectives $x = 0$, $x = \lambda$ ($\lambda > 0$), l'axe des x et la courbe représentative de la fonction U étudiée au A, est majorée par une constante indépendante de λ .