∽ Baccalauréat C Nice juin 1984 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$, on considère le point m d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x~;~y) \in \mathbb{R}^2$.
Lorsque z est différent de $-\mathrm{i}$, on envisage le nombre complexe :

$$Z = \frac{z^2}{z+\mathrm{i}}.$$

1. Déterminer et représenter l'ensemble (Γ) des points m tels que Z soit imaginaire pur.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 + 2\mathrm{i}az - 2a = 0$$

où a est un réel donné.
Montrer que les images des solutions de cette équation appartiennent à (Γ). Ce résultat était-il prévisible ?

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Dans le plan orienté rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on donne le point A de coordonnées $(0~;~1)$ et le cercle (C) de centre A et de rayon 1. Soit B un point de l'axe des abscisses, distinct de O. Soit (C') le cercle de centre B passant par A.

1. On appelle φ la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}},~\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$, appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}~;~+\frac{\pi}{2}\right[$. Exprimer en fonction de φ l'abscisse de B et le rayon du cercle (C).
2. **a.** Déterminer les deux homothéties qui transforment (C) en (C') : on déterminera le rapport et les coordonnées du centre de chacune de ces homothéties.

   b. Montrer que l'ensemble des centres de ces homothéties, lorsque B parcourt l'axe des abscisses (en restant distinct de O), est inclus dans une parabole que l'on demande de construire.

PROBLÈME **12 POINTS**

On note f_0 la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

Pour tout réel α strictement positif on note f_α la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_\alpha(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star,~ f_\alpha(x) = x^\alpha \cdot \mathrm{e}^{-x}.$$

Pour tout réel α positif, on notera $(\mathcal{C}_\alpha)$ la courbe représentative de f_α dans un plan rapporté à un repère orthonormal.

Partie A

1. Étudier les variations de f_0 et f_1. Représenter les courbes $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_1)$ sur une même figure (unité : 5 cm). On précisera la position de $(\mathcal{C}_0)$ par rapport à $(\mathcal{C}_1)$.
2. Soit α un réel strictement positif et différent de 1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f_α en 0. Étudier les variations de f_α.

3. Soit α un réel strictement positif. Préciser les positions relatives sur $\mathbb{R}_+^\star$ de $(\mathscr{C}_0)$ et $(\mathscr{C}_1)$.

Soit deux réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta$. Préciser les positions relatives sur $\mathbb{R}_+^\star$ de $(\mathscr{C}_\alpha)$ et $(\mathscr{C}_\beta)$. Démontrer que toutes les courbes $(\mathscr{C}_\alpha)$ passent par un même point et déterminer une équation de la tangente à la courbe $(\mathscr{C}_\alpha)$ en ce point.

4. Représenter les courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_\mathrm{e})$ sur une même figure (unité : 5 cm), distincte de celle demandée à la question 1.

5. α étant un réel strictement positif, soit g_α la restriction de f_α à l'intervalle $[\alpha\,;\,+\infty[$. Démontrer que g_α admet une fonction réciproque h_α.

On précisera l'ensemble de définition de h_α, le sens de variation de h_α ainsi que les propriétés de continuité et de dérivabilité de h_α.

Représenter graphiquement la courbe représentative de $h_{\frac{1}{2}}$ sur la même figure qu'à la question 4.

Partie B

Dans cette partie, on suppose que $\alpha = n$ est un entier naturel. On considère la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Calculer $F_0(x)$ et $F_1(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ et déterminer les limites des fonctions F_0 et F_1 lorsque x tend vers plus l'infini.

2. Pour $n \geqslant 1$ montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\quad F_n(x) = -x\mathrm{e}^{-x} + nF_{n-1}(x).$$

3. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier n, la fonction F_n admet une limite finie lorsque x tend vers plus l'infini. On notera cette limite u_n.

Quelle relation existe-t-il entre u_n et u_{n-1} ?

En déduire la valeur de u_n pour tout entier n.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ étudier les variations de F_n.

On donnera l'allure de la courbe représentative de F_3.

5. **a.** Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\quad \frac{F_n(1)}{n!} = -\frac{\mathrm{e}^{-1}}{n!} + \frac{F_{n-1}(1)}{(n-1)!}.$$

b. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \frac{F_n(1)}{n!} = 1 - \mathrm{e}^{-1}\left(\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}\right).$$

c. En utilisant une majoration de $f_n(t)$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, pour $n \geqslant 1$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star,\quad 0 \leqslant F_n(1) \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

d. À l'aide de 5. b. et 5. c., en déduire la limite de $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ lorsque n tend vers l'infini.