∽ Baccalauréat C Nice septembre 1970 ∾

EXERCICE 1

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère l'hyperbole (H) dont l'équation cartésienne est

$$3x^2 - y^2 + 2lx - l^2 = 0 \quad (l > 0).$$

1. Effectuer un changement de coordonnées par translation des axes, de manière à écrire l'équation de (H) sous la forme

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

2. Calculer l'angle aigu de l'axe transverse et d'une asymptote.

EXERCICE

Soit la fonction f de la variable réelle x définie par

$$x \xrightarrow{f} f(x) = \frac{x-1}{|x|+1}.$$

1. Étudier la continuité de f pour la valeur a de la variable x.
2. La fonction f est-elle dérivable pour la valeur $x = 0$ de la variable ?
3. Étudier et construire la représentation graphique de f en repère orthonormé.

EXERCICE 3

On désigne

— par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et par $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes,

— par ρ et $\rho^\star$ les racines dans $\mathbb{C}$, supposées non rationnelles, $(\rho \in \mathbb{Q})$, de l'équation

$$(1) \qquad z^2 - pz + q = 0,$$

où p et q sont deux éléments donnés de $\mathbb{Z}$,

— par Ω le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ formé par les nombres $\omega = x + \rho y$ obtenus lorsque x et y sont des entiers relatifs $[(x\,;\ y) \in \mathbb{Z}^2]$.

Partie A

1. **a.** Montrer l'équivalence

$$x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} : x + \rho y = 0 \iff x = y = 0.$$

b. Montrer que la somme et le produit dans $\mathbb{C}$ de deux éléments de Ω sont des éléments de Ω et que les opérations internes ainsi définies donnent à Ω une structure d'anneau commutatif. (Les démonstrations seront aussi succinctes que possibles.)

2. Pour tout élément $\omega = x + \rho y$, on pose

$$\omega^{\star} = x + \rho^{\star} y.$$

Montrer que $\omega^{\star}$ est élément de Ω.

3. Pour tout élément ω de $\mathbb{Q}$ on définit

$$N(\omega) = \omega\omega^{\star} = f(x\,;\;y).$$

a. Montrer que $f(x\,;\;y) = x^2 + pxy + qy^2$.
Constater que $N(\omega)$ est un entier relatif.

b. Montrer que pour tout couple $(\omega_1,\ \omega_2)$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ on a

$$(\omega_1\omega_2)^{\star} = \omega_1^{\star}\omega_2^{\star}.$$

En déduire que

$$N(\omega_1\omega_2) = N(\omega_1)\,N(\omega_2)\,\text{ů}$$

c. Montrer que

$$N\omega) = 0 \iff \omega = 0.$$

4. Soit ω un élément de $\mathbb{Q}$. Montrer que le nombre complexe ω^{-1} est élément de $\mathbb{Q}$ si, et seulement si, $N(\omega)$ est égal à 1 ou à -1.
Montrer que, muni de la loi de multiplication de $\mathbb{C}$, le sous-ensemble $\mathbb{Q}'$ des éléments ω de $\mathbb{Q}$ tels que $N(\omega) = 1$ est un groupe commutatif.

Partie B

Soit a, b, c et d des entiers relatifs. Soit l'application T de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$ définie par $T(x, y) = (X\,;\;Y)$, ,avec $X = ax + by$ et $Y = ex + dy$.
On se propose de rechercher a, b, c et d de façon que l'application T correspondante vérifie la condition

$$(2) \qquad \forall (x\,;\;y) \quad \text{on a} \quad N(X + \rho Y) = N(x + \rho y).$$

1. Calculer $N(X + \rho Y)$ en fonction de x, y, a, b, c, d, ρ et q.
On considère les nombres $\alpha, \alpha^{\star}, \beta$ et $\beta^{\star}$ définis par

$$\alpha = a + \rho c, \quad \beta = b + \rho d,$$

$$\alpha^{\star} = a + \rho^{\star} c \quad \beta^{\star} = b + \rho^{\star} d.$$

Démontrer que

$$N(X + \rho X) = \alpha\alpha^{\star} x^2 + (\alpha^{\star}\beta + \alpha\beta^{\star})xy + \beta\beta^{\star} y^2.$$

2. Trouver entre $\alpha,\ \beta,\ \alpha^{\star},\ \beta^{\star}\,p$ et q un ensemble de relations nécessaire et suffisant pour que la condition (2) soit réalisée.
Vérifier qu'alors $\alpha^{\star}\beta$ et $\alpha\beta^{\star}$ sont les solutions de l'équation (1).

3. Dans le cas où la condition (2) est vérifiée et où $\alpha\beta^{\star} = \rho$, calculer b et d en fonction de a, c, p et q sous forme de polynômes du premier degré par rapport à chacune des variables qu'ils contiennent.
Quelle est la valeur de $f(b\,;d)$?