**Durée : 4 heures**

# ∽ Baccalauréat C septembre 1974 Nice ∽

**EXERCICE 1**

On décide de former des nombres en base dix en écrivant de gauche à droite quatre chiffres consécutifs dans l'ordre croissant, puis en permutant les deux premiers chiffres de gauche.
Montrer que tous les naturels ainsi obtenus sont des multiples de 11.
L'un d'eux $N$ est un carré parfait ; déterminer $N$.

**EXERCICE 2**

On donne un plan affine euclidien P associé au plan vectoriel E et, dans le plan P, le rectangle ABCD tel que :

$$\left\|\overrightarrow{\text{AB}}\right\| = a \quad \text{et} \quad \left\|\overrightarrow{\text{AD}}\right\| = 2a \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}_+^\star$$

**1.** On note $f$ l'application de P vers E définie par :

$$\forall M \in \text{P}, \quad f(M) = \overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{M\text{B}} + 2\overrightarrow{M\text{C}} + \lambda\overrightarrow{M\text{D}}.$$

où $\lambda$ est un réel donné.
Comment faut-il choisir $\lambda$ pour que $f$ soit
— une bijection ?
— une application constante ?
Préciser l'image $f(M)$ dans chacun des cas suivants :

$$\lambda = 0, \quad \lambda = 4; \quad \lambda = -4$$

**2.** On considère l'application $g$ de P vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall M \in \text{P}, \quad g(M) = M\text{A}^2 + M\text{B}^2 + 2M\text{C}^2 - 4M\text{D}^2$$

Préciser l'ensemble des points $M$ de P tels que :

$$g(M) = \text{AB}^2 + 2\text{AC}^2 - 4\text{AD}^2.$$

**PROBLÈME**

On considère un plan affine P muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On note $T_{(a,b)}$ l'application de P vers P qui, au point $M$ de coordonnées $x$, $y$, associe le point $M'$ de coordonnées $x'$, $y'$, telles que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & ax \\ y' & = & bx + \dfrac{1}{a}y \end{array}\right. \qquad \text{où } (a\,;\ b) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$$

**Partie A**

**1.** Démontrer que l'ensemble $E = \left\{T_{(a,b)}\ a \in \mathbb{R}^\star,\ b \in \mathbb{R}\right\}$ muni de la loi $\circ$ de composition des applications, est un groupe.

2. Montrer que

$$E' = \left\{T_{(a,\ 0)} / a \in \mathbb{R}^{\star}\right\} \quad \text{et} \quad E'' = \left\{T_{(1,\ b)} / b \in \mathbb{R}\right\}$$

munis de la loi $\circ$ sont deux sous-groupes commutatifs de $E$, respectivement isomorphes au groupe multiplicatif $\left(\mathbb{R}^{\star},\ \times\right)$ et au groupe additif $(\mathbb{R},\ +)$.

3. Montrer que toute application $T_{(a,b)}$ de $E$ peut se décomposer en

$$T_{(a,b)} = T_{l1} \circ T_2 = T_3 \circ T_1$$

avec $T_1 \in E',\ T_2 \in E'',\ T_3 \in E''$.

**Partie B**

1. Déterminer $a$ et $b$ pour que $T_{(a,b)}$ soit involutive.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par $T_{(a,b)}$.
3. Déterminer l'image $D' = T_{(a,b)}(D)$ d'une droite $D$ dans les deux cas suivants :
   **a.** $D$ a pour équation $x = k$ ($k$ réel donné)
   **b.** $D$ a pour équation $y = mx + k$ ($m$ et $k$ réels donnés).

**Partie C**

1. Étudier les variations de la fonction réelle de la variable réelle définie par

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

et construire sa courbe représentative $(H)$ dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. Déterminer les points $M$ de $(H)$ tels que la tangente en $M$ à $(H)$ soit perpendiculaire à la droite O$M$.

2. $M_1$ et $M_2$ étant deux points de $(H)$ d'abscisses respectives $x_1$ et $x_2$ $(0 < x_1 < x_2)$, calculer l'aire $S$ de la partie du plan comprise entre la courbe $(H)$, la droite d'équation $y = x$, et les deux parallèles à O$y$ passant respectivement par $M_1$ et $M_2$.

**Partie D**

Dans cette partie, $b = a - \dfrac{1}{a}$ et on note $S_a = T_{\left(a,\ a-\frac{1}{a}\right)}$. Alors si A est le point de coordonnées (1 ; 2), son image $N = S_a(\text{A})$ a pour coordonnées

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & a \\ y' & = & a + \dfrac{1}{a} \end{array}\right.$$

Ce point $N$ est animé par rapport à $\left(\text{O}\,;\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ d'un mouvement défini en fonction du temps $t$ par $a = 2^t$, $t$ décrivant $\mathbb{R}$ en croissant.

1. Montrer que $(H)$ est globalement invariante par $S_a$ c'est-à-dire

$$M \in (H) \Longrightarrow S_a(M) \in (H).$$

2. Préciser la trajectoire du point $N$. Calculer la vitesse $\overrightarrow{\text{V}(t)}$ et l'accélération $\overrightarrow{\Gamma(t)}$ de $N$, à l'instant $t$. Montrer que $\overrightarrow{\Gamma(t)}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\text{O}N}$.
3. Quelles sont les positions de $N$ telles que $\overrightarrow{\text{V}(t)}$ et $\overrightarrow{\Gamma(t)}$ soient orthogonaux?
   Indiquer sur la trajectoire les arcs qui correspondent à un mouvement accéléré, à un mouvement retardé.
4. Calculer l'aire $S$ de la question C 2. lorsque les points $M_1$ et $M_2$ sont les positions du point mobile $N$ à deux instants $t$ et $t + 1$. Vérifier que cette aire ne dépend pas de $t$.