Durée : 4 heures

Baccalauréat C Nice septembre 1975

EXERCICE 1

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^3 + (5-7\mathrm{i})z^2 - (4+12\mathrm{i})z - 20 + 4\mathrm{i} = 0.$$

1. Montrer que cette équation admet une racine réelle z_1.
2. En déduire le calcul des deux autres racines z_2 et z_3.

EXERCICE 2

p et n désignent des entiers naturels. On pose :

$$I_{p,\ n} = \int_0^1 x^p(1-x)^n\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer $I_{p,\ 0}$ et $I_{p,\ 1}$.
2. Calculer $I_{0,\ n}$ et en déduire $I_{1,\ n}$.
3. Etablir pour $n \geqslant 1$ la relation :

$$I_{p,\ n} = \frac{n}{p+1} I_{p+1,\ n+1}.$$

N. B. : Par convention, $x^0 = (1-x)^0 = 1$.

PROBLÈME

Si $N = \begin{pmatrix} a & d\\ b & c\end{pmatrix}$ est une matrice 2-2 à coefficients réels et λ est un nombre réel, on définit le produit λN de N par λ à l'aide de la formule :

$$\lambda N = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda d\\ \lambda b & \lambda c\end{pmatrix}$$

On pourra admettre que l'ensemble des matrices 2-2 à coefficients réels muni de l'addition des matrices et de la multiplication externe définie ci-dessus est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On note E l'ensemble des matrice M de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ où a, b, c appartiennent à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
On pose : $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} , & 0 & 0\\ & 0 & 1\end{pmatrix}.$

Partie A

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des matrices 2-2 à coefficients réels et que $(e_1,\ e_2,\ e_3,\ )$ est une base de E.
2. E muni de l'addition et de la multiplication matricielles est-il un anneau ?

Partie B

Soit t l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ fait correspondre le nombre réel $t(M) = a + c$.

1. Montrer que t est une forme linéaire sur E, c'est-à-dire une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le noyau F de t. Montrer que $(e_1 - e_3,\ e_2)$ est une base de F.

Partie C

On définit l'application φ de E^2 dans $\mathbb{R}$ par $\varphi(M,\ M_1) = t(M_1 \cdot M)$, c'est-à-dire que $\varphi(M,\ M_1)$ est l'image par t du produit matriciel de M_1 et M.

1. En posant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}$, calculer $\varphi(M \cdot rM_1)$ en fonction de a, b, c, a_1, b_1, c_1.
   En déduire que φ est un produit scalaire. Dans toute la suite du problème, l'espace E sera muni de ce produit scalaire.
2. Démontrer que $\mathrm{I} = e_1 + e_3$ est orthogonal à tout « vecteur » de F.

Partie D

1. Démontrer que pour tout M appartenant à E, on a :

$$M^2 = t(M) \cdot M - (\det M) \cdot \mathrm{I}$$

   où det M désigne le déterminant de la matrice M.
2. Si M_1 est un élément quelconque de F, montrer que M_1^2 et M_1 sont des vecteurs orthogonaux dans l'espace euclidien (E, φ), et que M_1^3 et M_1 sont colinéaires.
   Que peut-on dire de M_1^n et M_1, n étant un entier naturel supérieur ou égal à un ?
   Discuter.

Partie E

1. M étant un élément quelconque de E, déterminer la « projection orthogonale » M_1 de M sur F. Calculer la somme de M_1 en fonction du déterminant de M_1.
2. On pose $M = M_1 + \lambda \mathrm{I}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Déterminer λ en fonction de a et c.
3. Calculer M^2, M^3, …, M^n en fonction de λ, I et des puissances de M_1.