Baccalauréat C Nice septembre 1976

EXERCICE 1

Un joueur dispose de 3 dés qu'il lance simultanément. Leurs faces sont numérotées de 1 à 6. Il ne les lance qu'une fois.
Son gain est ainsi attribué :

- si les trois chiffres sortis sont égaux, il gagne 5 F ;
- si parmi les trois chiffres il y a deux « 1 » et deux seulement, il gagne 2 F ;
- si les trois chiffres sont consécutifs, alors il gagne 1 F ;
- dans tout autre cas, son gain est nul.

On appelle X la variable aléatoire correspondant à son gain.

1. Établir la loi de probabilité, ou distribution, de X.
2. Etablir la fonction de répartition.
   En donner une représentation graphique.
3. Calculer E(X) (espérance mathématique de X).

EXERCICE 2

Le plan affine P est rapporté à un repère $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On considère l'application f de P dans P qui, à tout point $M(x~;~y)$, associe le point $M'\left(x'~;~y'\right)$ défini par :

$$\left\{\begin{array}{l c r}x' & = & \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}\\ y' & = & -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}\end{array}\right.$$

1. Montrer que f est une application affine non bijective. Déterminer l'ensemble D des points de P invariants par f.
2. Étudier l'ensemble des antécédents par f d'un point donné $M'(a'~;~b')$ de P, en distinguant deux cas, suivant que M' appartient, ou n'appartient pas, à D.
3. Reconnaître l'application f et préciser ses éléments.

PROBLÈME

Partie A

Dans toute la suite, on note $\mathbb{R}_+^\star$ et $\mathbb{N}^\star$ l'ensemble des réels positifs, et l'ensemble des entiers naturels privés de zéro.

1. Étudier la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$f(x) = \text{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}.$$

   En déduire que, pour tout réel t supérieur à 1, on a l'inégalité

$$(1) \qquad \int_1^t x\text{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\,\text{d}x \geqslant \int_1^t \frac{x}{1+x}\,\text{d}x.$$

2. Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^{x\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

Calculer $g'(x)$; en déduire sur $\mathbb{R}_+^\star$ une primitive de f.

Calculer l'aire G du domaine limité par la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé, l'axe des abscisses de ce repère, les droites d'équation $x = \alpha$, $x = \beta$ où α et β sont deux réels donnés vérifiant $0 < \alpha < \beta$, puis étudier la limite de cette aire lorsque β tend vers $+\infty$ et α tend vers 0.

3. Vérifier que la fonction numérique h définie par $h(x) = \mathrm{Log}\, g(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Utiliser la fonction en escalier k définie sur $[1\,;\,n[$ $(n \in \mathbb{N}^\star)$ par

$$k(x) = p\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{p}\right) \quad \text{lorsque } x \in [p-1\,;\,p]$$

p prenant successivement toutes les valeurs entières de 2 à n, pour démontrer l'inégalité

$$(2) \qquad \sum_{p=1}^{n} p\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{p}\right) \geqslant \int_1^n x\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Partie B

1. Démontrer que : $\forall \alpha > 0, \quad \mathrm{Log}\,\alpha \leqslant \alpha - 1.$

(On pourra étudier les variations de la fonction $x \longmapsto \mathrm{Log}\,x - x + 1$).

2. Soient $x_1, x_2, , \ldots, x_{n-1}, x_n$, n nombres réels strictement positifs.

En appliquant l'inégalité précédente à chacun des réels

$$\alpha_i = \frac{x_i}{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

démontrer que :

$$(3) \qquad \frac{1}{n}\left[\mathrm{Log}\,x_1 + \mathrm{Log}\,x_2 + \ldots + \mathrm{Log}\,x_n\right] \leqslant \mathrm{Log}\,\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

3. Démontrer que l'inégalité (3) est équivalente à

$$x_1x_2\cdots x_n \leqslant \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n$$

Partie C

On considère les suites (u) et (é) de terme général

$$n \in N^\star \quad u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \text{é}_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}.$$

1. Démontrer que les suites de terme général u_n et $\mathrm{Log}\,u_n$ sont croissantes, convergentes et que leurs limites respectives sont e et 1.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \text{é}_n \leqslant \mathrm{e}$.

2. En utilisant les inégalités (1), (2) et (3), montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad \mathrm{Log}\,\text{é}_n \geqslant \frac{1}{n}\int_1^n \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

3. Calculer $\omega_n = \displaystyle\int_1^n \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ (on remarquera que $\dfrac{x}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$), puis $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\omega_n}{n}$.

4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\dfrac{1}{n}\omega_n \leqslant \operatorname{Log} \acute{e}_n \leqslant 1$, et en déduire que (é) est convergente. Quelle est sa limite ?