Baccalauréat C Nice septembre 1977

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Soit a un nombre complexe non nul. On considère le polynôme :

$$Pa(z) = z^3 - 6az^2 + 12a^2z - 7a^3.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P_1(z) = 0$. (On observera que $P_1(1) = 0$).
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P_a(z) = 0$. $\left(\text{On pourra poser } Z = \dfrac{z}{a}\right)$.
3. Soit T_a le triangle dont les sommets ont pour affixes les racines de $P_a(z) = 0$.
   Montrer que T_1 est équilatéral ; en déduire que T_a est équilatéral pour tout a.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Soit P un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
À tout point M de P, de coordonnées $(x ; y)$, on associe son affixe $z = x + \text{i}y$.
Soient A, B, C les points de coordonnées respectives $(1 ; 0)$, $(0 ; 1)$, $(0 ; -1)$.

1. **a.** II existe une unique similitude directe s_1 de P telle que l'on ait $s_1(\text{A}) = \text{B}$ et $s_1(\text{B}) = \text{C}$.
   Pour tout point M de P, d'affixe z, exprimer en fonction de z l'affixe z_1 du point $s_1(M)$, image de M par s_1.
   b. Trouver le centre K_1, le rapport k_1 et l'angle α_1 de s_1.
2. Il existe une unique similitude indirecte s_2 de P telle que l'on ait $s_2(\text{A}) = \text{B}$ et $s_2(\text{B}) = \text{C}$.
   a. Pour tout point M de P d'affixe z, exprimer en fonction de z l'affixe z_2 du point $s_2(M)$, image de M par s_2.
   b. Trouver le centre $\text{K}_2$2, le rapport k_2 de s_2 et la droite Δ_2 telle que, si l'on note $h(\text{K}_2, k_2)$ l'homothétie de centre K_2 et de rapport k_2 et s_{Δ_2} la symétrie affine orthogonale par rapport à Δ_2, l'on ait :

$$s_2 = h(\text{K}_2, k_2) \circ s_{\Delta_2} = s_{\Delta_2} \circ h(\text{K}_2, k_2)$$

PROBLÈME **12 POINTS**

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f : x \longmapsto \text{e}^{-x^2}.$$

Partie A

1. Démontrer que f est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f', f'', f'''.
2. Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la dérivée n-ième $f^{(n)}$ s'exprime comme le produit de f et d'une fonction polynôme P_n, de degré n. (On ne demande pas de déterminer P_n).

3. Étudier les fonctions f, f', f'' et tracer leurs courbes représentatives dans un même repère orthonormé $\left(\mathrm{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (On prendra $\left\|\vec{\imath}\right\| = \left\|\vec{\jmath}\right\| = 5$ cm).
Démontrer en particulier que l'on a :

$$\text{pour } x > 1, \quad \left|f''(x)\right| > \left|f'(x)\right| > \left|f(x)\right|.$$

Déterminer les coordonnées des points d'intersection respectifs des trois courbes.

Partie B

Soit E l'espace vectoriel des fonctions trinômes de la fonction :

$$x \longmapsto ax^2 + bx + c \quad (a,\, b,\, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

On sait que : dim E = 3.
On pose : $\forall i \in \{0,\, 1,\, 2\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_i(x) = \mathrm{e}^{x^2} f^{(i)}(x) \quad \left(f^{(0)} = f\right)$.

1. Montrer que $(P_0,\, P_1, P_2)$ est une base de E.

2. Soit Q la fonction trinôme définie par : $Q : x \longmapsto -3 - 4x + 4x^2$.
Trouver les coordonnées de Q dans la base $(P_0,\, P_1, P_2)$.

3. On pose : $\forall i \in \{0,\, 1,\, 2\}, \quad A_i = \displaystyle\int_0^1 P_i(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.
Calculer A_1 et A_2 et démontrer que l'on a : $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant A_0 \leqslant 1$.

4. Soit φ l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi : S \longmapsto \int_0^1 S(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

a. Montrer que φ est une forme linéaire sur E.

b. Calculer $\varphi(Q)$ en fonction de A_0.

c. Si S a pour coordonnées $(\alpha_0 ; \alpha_1 ; \alpha_2)$ dans la base $(P_0,\, P_1, P_2)$, calculer $\varphi(\mathrm{S})$ en fonction de $\alpha_0,\, \alpha_1,\, \alpha_2$.

d. Démontrer que le noyau Ker φ de φ est un plan vectoriel de E dont on donnera une base.

e. Démontrer que la droite vectorielle engendrée par P_0 est un sous-espace vectoriel supplémentaire de Ker φ dans E.

f. Démontrer que l'ensemble des polynômes S de E solutions du système :

$$(1) \quad \left\{\begin{array}{lcl} \varphi(S) & = & 0 \\ 4S'(0) + S''(0) & = & 0 \end{array}\right.$$

est un sous-espace vectoriel de E dont on donnera la dimension et une base.

Partie C

Pour tout entier naturel non nul, on désigne par g_n la fonction définie par :

$$g_n : x \longmapsto x^n \mathrm{e}^{-x^2}.$$

et on pose :

$$I_n = \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_1.

2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}, $(n \geqslant 2)$.

3. Utiliser cette relation pour calculer I_7.