∽ Baccalauréat C Nice septembre 1973 ∾

EXERCICE 1

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_1 & = & 2\\ u_n & = & \dfrac{1}{4}u_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\},\end{array}\right.$$

1. Déterminer le nombre réel α tel que la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n + \alpha$ soit une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. En déduire que (u_n) est une suite convergente et préciser sa limite.
3. Calculer en fonction de n le nombre

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

La suite (S_n) est-elle convergente ?

EXERCICE 2

Soit V un espace vectoriel euclidien orienté, $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ une base orthonormée de V, de sens direct.
On considère l'application f de V dans V qui au vecteur $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}$ associe le vecteur

$$\overrightarrow{u'} = f\left(\overrightarrow{u}\right) = y\overrightarrow{\imath} - z\overrightarrow{\jmath} - x\overrightarrow{k}.$$

Montrer que f est une transformation orthogonale de V.
Trouver l'ensemble (D) des vecteurs de V invariants par f.
Soit (P) le plan orthogonal à (D). On oriente (P) par le vecteur unitaire $\overrightarrow{a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} - \overrightarrow{k}\right)$ de (D).
Montrer que la restriction de f à (P) est une rotation vectorielle dont on déterminera un angle θ.

EXERCICE 3

Partie A

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et u une application linéaire de E dans E.
On désigne par N le noyau de u.
Soit $a \in$ E et $b \in$ E tels que $u(a) = b$.

1. Montrer que, quel que soit y appartenant à $\mathbb{N}$, $u(a+y) = b$.
2. Soit $a' \in$ E tel que $u\left(a'\right) = b$.
   Montrer que $a' - a \in \mathbb{N}$.
3. Soit l'équation $u(x) = b$ et S l'ensemble de ses solutions.
   Montrer que $\text{S} = \left\{x \in \text{E} | x = a + y,\ y \in \mathbb{N}\right\}$..

Partie B

Soit I =]0 ; $+\infty$[et E l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivables.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel F sur $\mathbb{R}$ des applications de I dans $\mathbb{R}$.

2. Si f est un élément de E, on définit l'application f de I dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)f(x) + xf'(x).$$

   Montrer que f est indéfiniment dérivable.

3. Trouver la primitive g de la fonction

$$x \longmapsto -\frac{x+1}{x} \quad (x \in \mathrm{I})$$

   qui prend la valeur -1 pour $x = 1$.
   En déduire que, pour. que l'application $\hat{f}$ soit l'application nulle sur I, il faut et il suffit que la dérivée de l'application $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^{g(x)}}$ soit nulle sur I.

Partie C

On considère l'application u de E dans E qui à l'élément f associe $\hat{f}$.

1. Montrer que u est linéaire.
   En utilisant **B , 3.**, montrer que son noyau N est de dimension 1.
2. Soit b l'élément de E défini par $b(x) = x^2 + 2x$.
   Trouver dans E un polynôme P vérifiant $u(P) = b$.
   (On cherchera d'abord le degré de P.)
3. Quelles sont les solutions dans E de l'équation $u(f) = b$, où f est l'inconnue ?

Partie D

Étudier les variations de la fonction f :

$$x \longmapsto -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \quad (x \in \mathrm{I})$$

et la représenter graphiquement