

Baccalauréat C Nice septembre 1978

EXERCICE 1

3 POINTS

Soit \mathcal{E} , un plan affine rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}) = \mathcal{R}$.

Soit D la droite d'équation $x + y - 1 = 0$,

et Δ la droite d'équation $x - y - 1 = 0$.

Soit M un point de coordonnées $(x; y)$ dans le repère \mathcal{R} .

1. Déterminer les coordonnées $(x'; y')$ du point M' image du point M dans la symétrie orthogonale s par rapport à la droite D .
2. Déterminer les coordonnées $(x''; y'')$ du point M'' image du point M dans la symétrie orthogonale σ par rapport à la droite Δ .
3. Soit $f = \sigma \circ s$. Quelle est la nature de f ? Pouvait-on prévoir le résultat?

EXERCICE 2

3 POINTS

1. Établir la table de multiplication dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
2. Résoudre les équations :
 - a. $x^2 = 0$;
 - b. $x^2 = x$;
 - c. $\dot{3}x = \dot{0}$.
 où x est élément de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
3. Résoudre le système dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} \dot{2}x - \dot{4}y = \dot{2} \\ x + \dot{5}y = \dot{2} \end{cases}$$

PROBLÈME

13 POINTS

On désigne par « a » un nombre réel de l'intervalle $[0; \pi]$, et on considère la fonction numérique f_a définie par

$$f_a(x) = \text{Log}(x^2 - 2x \cos a + 1).$$

On appelle (\mathcal{C}_a) la représentation graphique de f_a dans un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Déterminer l'ensemble de définition de f_a suivant les valeurs de « a ».
2. Trouver les limites, quand x tend vers $+\infty$, de $f_a(x)$ et de la fonction : $x \mapsto f_a(x)$.
3.
 - a. Montrer que (\mathcal{C}_a) admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \cos a$.
 - b. Montrer que (\mathcal{C}_a) et $(\mathcal{C}_{\pi-a})$ sont symétriques par rapport à la droite (O, \vec{j}) .
 - c. a et a' étant deux réels distincts de l'intervalle $[0; \pi]$, déterminer l'intersection de (\mathcal{C}_a) et de $(\mathcal{C}_{a'})$.
4.
 - a. Étudier les variations de f_0 et tracer (\mathcal{C}_0) .
 - b. En déduire (\mathcal{C}_π) .

5. a. Quand « a » est différent de 0 et de π , étudier les variations de f_a .
 b. Tracer ensuite (\mathcal{C}_a) pour $a = \frac{\pi}{3}$.

Partie B

Soit n appartenant à \mathbb{N}^* .

1. a. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^{2n} - 1 = 0$.
 b. Soit z_k le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{k\pi}{n}$, où k appartient à $I = \{0, 1, 2, \dots, 2n-1\}$.
 k appartenant à $I - \{0, n\}$, soit k' tel que $k + k' = 2n$; à quel ensemble appartient alors k' ?
 Montrer que le polynôme $P(z) = (z - z_k)(z - z_{k'})$ a des coefficients réels que l'on déterminera en fonction de k et n .
 c. On admettra que :

$$\forall z, z \in \mathbb{C}, \quad z^{2n} - 1 = (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_k) \dots (z - z_{2n-1}).$$

En utilisant b. montrer que $z^{2n} - 1$ peut s'écrire sous la forme d'un produit de polynômes de degré inférieur ou égal à 2 à coefficients réels.

2. On considère $S_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n-1} f_{\frac{k\pi}{n}}(x)$ où x est un réel et où

$$f_{\frac{k\pi}{n}}(x) = \text{Log} \left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right).$$

- a. Montrer que S_n est définie et continue sur \mathbb{R} .
 b. Dédire de B 1. c. que si $x \neq 1$ et $x \neq -1$, on a :

$$S_n(x) = \text{Log} \frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1}.$$

- c. En déduire alors $S_n(1)$ et $S_n(-1)$.
 3. x étant un réel fixé, différent de 1 et de -1 , on considère la fonction g_x telle que :

$$g_x(t) = \text{Log} (x^2 - 2x \cos t + 1)$$

pour t appartenant à $[0; \pi]$.

- a. Vérifier que g_x est bien définie sur $[0; \pi]$, et qu'elle est intégrable sur $[0; \pi]$.
 b. Comparer $S_n(x)$ à une somme de Riemann de la fonction g_x .
 c. En déduire la valeur de l'intégrale

$$I(x) = \int_0^\pi \text{Log} (x^2 - 2x \cos t + 1) dt.$$