Durée : 4 heures

Baccalauréat C Nice septembre 1984

EXERCICE 1 **5 points**

1. u étant un nombre complexe de module 1 et d'argument $\theta \in]0\ ;\ 2\pi[$, déterminer le module et un argument du nombre complexe z tel que

$$\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} = u.$$

2. On considère l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$(\mathrm{E}) : \quad \left(z^2+1\right)^n - (z+\mathrm{i})^{2n} = 0$$

où n est un entier non nul donné.
En remarquant que $-\mathrm{i}$ est solution de (E), résoudre (E).

EXERCICE 2 **5 points**

In considère, dans le plan, une droite donnée (D), et un point donné A, n'appartenant pas à (D).

1. Quel est l'ensemble des foyers des paraboles passant par le point A et ayant pour directrice la droite (D) ?
   Représenter cet ensemble dans le plan.
2. Démontrer que l'ensemble des sommets des paraboles passant par A et ayant (D) pour directrice est inclus dans une ellipse (E).
   Déterminer (E) sur la figure précédente.

PROBLÈME **10 points**

Les parties **II** et **III** sont indépendantes, l'une de l'autre.
La partie **III** est, dans une large mesure, indépendante de **I**.

Soit le plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Dans tout le problème on note, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, f_p la fonction définie par :

$$\left\{\begin{array}{l c l}f_p(x) & = & x^p \ln|x| \quad \text{si } x \in \mathbb{R}^\star\\ f_p(0) & = & 0.\end{array}\right.$$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f_p dans $\mathscr{R}$.

Partie I

1. Étudier, suivant les valeurs de p, la continuité et la dérivabilité de f_p en 0.
2. Étudier la parité de f_p.
   Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$.
3. **a.** Calculer la limite de f_p quand x tend vers $+\infty$.
   b. Étudier les variations de f_p (on distinguera 4 cas :
   $p < 0, p = 0, p = 1, p > 1$).

4. En calculant un développement limité d'ordre 1 de $(1+h)^p$ en zéro, et un développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+h)$ en zéro, déduire un développement limité d'ordre 2 de $f_p(1+h)$ en zéro.

En déduire l'équation de la tangente D à toutes les courbes $\mathcal{C}_p$ au point d'abscisse 1, ainsi que les positions relatives de $\mathcal{C}_p$ et de D suivant les valeurs de p.

5. Donner l'allure des courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_{-2}$. On fera trois figures différentes, et l'on prendra 2 cm comme unité.

6. Pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, déterminer, en intégrant par parties, l'aire de la partie de plan limitée par la droite $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}\right)$, les droites d'équations $x = 1$ et $x = \text{e}^{\frac{1}{p+1}}$ et la courbe $\mathcal{C}_p$.

Partie II

On considère la fonction $g = f_1 \circ \sin$.

On a donc $\left\{\begin{array}{lll} g(x) & = & \sin x \ln|\sin x| \quad \text{si} x \neq k\pi \\ g(k\pi) & = & 0. \end{array}\right.$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de g en 0.

2. Montrer qu'il existe un seul $x_0 \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin x_0 = \dfrac{1}{\text{e}}$.

3. Étudier les variations de g en précisant la période et la parité; puis tracer la courbe représentative de g sur une période, dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm).

Partie III

On considère la suite $\left(u_p\right)$ définie par u_0 et pour tout p appartenant à $\mathbb{N}$,

$$u_{p+1} = f_1\left(u_p\right).$$

1. Étudier $\left(u_p\right)$ dans le cas où $u_0 = 0$; $u_0 = \text{e}$; $u_0 = -\text{e}$.

2. Si $u_0 = \dfrac{1}{\text{e}}$ ou $u_0 = -\dfrac{1}{\text{e}}$, montrer que $\left(u_p\right)$ est une suite géométrique.

Est-elle convergente?

3. On se place dans le cas où $|u_0| > \text{e}$.

a. Si $u_0 > \text{e}$, montrer que $u_1 > u_0 > \text{e}$ et, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $u_p > u_{p-1} > \text{e}$.

b. Si $u_0 < -\text{e}$, montrer que $u_1 < u_0 < -\text{e}$ et, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $u_p < u_{p-1} < -\text{e}$.

Dans ces cas a et b montrer que $\left|u_p\right| \geqslant |u_0|\left(\ln|u_0|\right)^p$.

La suite $\left(u_p\right)$ est-elle convergente?