Baccalauréat E Aix – Corse – Limoges – Toulouse – Nice juin 1981

EXERCICE 1

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & \text{Log}\left|x^2-x-2\right| & \text{pour } x \text{ élément de } \mathbb{R}^-,\\ f(x) & = & -1+\text{Log}(x+2)+\text{e}^x & \text{pour } x \text{ élément de } \mathbb{R}^{+*}.\end{array}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.
2. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
3. Soit g la restriction de f à $]-\infty~;~-1[$.
   Montrer que g est bijective de $]-\infty~;~-1[$ vers un intervalle que l'on déterminera.
   Calculer $g^{-1}(2)$.

EXERCICE 2

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

   $$z^3-(2-\text{i})z^2+(5-3\text{i})z-2+6\text{i}=0$$

   sachant que l'une des solutions est imaginaire pure. Soit z_1 cette solution.
   On trouvera deux autres solutions, on appellera z_2 celle de partie imaginaire négative et z_3 celle de partie imaginaire positive.
2. Soit A le point d'affixe z_1, B le point d'affixe z_2, C le point d'affixe z_3 et Ω le point d'affixe 1.
   On définit la similitude directe s telle que

   $$\left\{\begin{array}{rcl} s(\text{A}) & = & \Omega\\ s(\text{B}) & = & \text{C}.\end{array}\right.$$

   Déterminer son centre, son rapport et une mesure de son angle.

PROBLÈME

Partie A

Soit E_3 espace vectoriel euclidien rapporté à la base orthonormée $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Pour $(a~;~b)$ élément de $\mathbb{R}^2$, on définit $\varphi_{a,\,b}$, endomorphisme de E_3, par

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi_{a,\,b}\left(\vec{\imath}\right) & = & (3a+b)\vec{\imath}-4a\vec{\jmath}\\ \varphi_{a,\,b}\left(\vec{\jmath}\right) & = & -4a\vec{\imath}-(3a-b)\vec{\jmath}+b\vec{k}\\ \varphi_{a,\,b}\left(\vec{k}\right) & = & \vec{k}.\end{array}\right.$$

1. Déterminer le noyau et l'image de $\varphi_{a,\,b}$. Discuter suivant les valeurs de a et b.
   Pour quelles valeurs de $(a~;~b)$ $\varphi_{a,\,b}$ est-elle bijective ?
2. Déterminer les couples $(a~;~b)$ pour lesquels $\varphi_{a,\,b}$ est une isométrie vectorielle.
3. Montrer que $\varphi_{\frac{1}{5},\,0}$ est une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à un plan vectoriel que l'on déterminera.

Partie B

Soit $\mathcal{E}_3$ un espace affine euclidien d'espace vectoriel associé E_3.
Soit $R = \left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$ un repère orthonormé de $\mathcal{E}_3$.
Soit f, application de $\mathcal{E}_3$ vers $\mathcal{E}_3$ qui au point M, de coordonnées $(x\,;\ y\,;\ z)$ dans $\mathbb{R}$, associe le point M' de coordonnées $\left(x'\,;\ y'\,;\ z'\right)$ définies par

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 4 \\ y' & = & -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 3 \\ z' & = & z. \end{array}\right.$$

1. Montrer que f est une isométrie ponctuelle.
2. Soit P le plan affine passant par O, dont un système de vecteurs directeurs est $\left(\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   Montrer que P est globalement invariant par f.
3. Soit g la restriction de f à P.
   Montrer que l'on peut définir g_1 symétrie ponctuelle orthogonale par rapport à une droite affine D et t_1 translation dont le vecteur est directeur de D, telles que
   $$g = g_1 \circ t_1 = t_1 \circ g_1.$$
4. Soit P_1 le plan affine contenant D, et parallèle à l'axe $z'Oz$.
   Soit f_1 la symétrie ponctuelle orthogonale par rapport à P_1.
   Montrer qu'il existe une translation t_1' telle que
   $$f = f_1 \circ t_1' = t_1' \circ f - 1$$
   le vecteur de t_1' étant un vecteur de la direction de P_1.

Partie C

Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & -\frac{1}{3}\left[4(x+1) + 5\sqrt{x^2+2x-2.}\right]. \end{array}$$

1. Étudier ses variations.
   Soit (Γ) sa courbe représentative. Montrer que les droites d'équation $y = -3(x+1)$ et $y = \frac{1}{3}(x+1)$ sont asymptotes à (Γ), la première si x tend vers $+\infty$ et la deuxième si x tend vers $-\infty$.
   Tracer (Γ) dans le plan affine euclidien P défini à la partie **B 2.**, ce plan étant rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
2. Soit $\left(\Gamma'\right)$ la courbe d'équation
   $$y = -\frac{1}{3}\left[4(x+1) - 5\sqrt{x^2+2x-2.}\right]$$
   On ne demande pas de tracer $\left(\Gamma'\right)$.
   Montrer que $\left(\Gamma \cup \Gamma'\right)$ a pour équation
   $$(2x - y + 2)^2 - (x + 2y + 1)^2 = 25.$$

3. Montrer que $\left(\Gamma \cup \Gamma'\right)$ est globalement invariante par l'application g_1 définie au **B. 3.**