

∞ **Baccalauréat C Nice juin 1966** ∞  
**Mathématiques et mathématiques et technique**

**EXERCICE 1**

On donne un angle quelconque  $xOy$ . Un point M décrit la demi-droite Ox. Un point N varie sur Oy de façon que  $ON - OM = \ell$ ,  $\ell$  étant une longueur donnée.

1. Trouver le lieu du milieu,  $\alpha$ , du segment MN. (On peut utiliser la voie analytique, les axes étant Ox, Oy.)
2. On appelle  $\beta$  le point du segment MN tel que  $\frac{\overrightarrow{M\beta}}{\overrightarrow{MN}} = k$ ,  $k$  étant un nombre donné.  
 Trouver le lieu de  $\beta$  quand M varie.

**EXERCICE 2**

On donne un repère orthonormé et le cercle de centre O (origine du repère), de rayon R et orienté dans le sens trigonométrique. On appelle A le point (+ R; 0) et A' le point (-R; 0); M et N désignent deux points quelconques du cercle et l'on pose

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right) = a, \quad \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}\right) = b,$$

$a$  et  $b$  étant les mesures en radians des angles correspondants, comprises entre 0 et  $2\pi$ .

1. Démontrer que l'équation de la droite MN peut s'écrire

$$x = \cos \frac{a+b}{2} + y \sin \frac{a+b}{2} - R \cos \frac{a-b}{2} = 0.$$

2. On suppose que la droite MN coupe l'axe  $y'Oy$  en 1 et l'on appelle C le deuxième point où la droite AI recoupe le cercle. C sera appelé « point associé » au couple de points M, N et l'on pose  $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) = c$  ( $c$  compris entre 0 et  $2\pi$ ).

Former la relation liant les trois nombres  $a, b$  et  $c$ .

À cet effet, on formera d'abord l'équation de la droite AC, puis on exprimera que les droites MN et AC coupent  $y'Oy$  au même point.

Montrer que la relation trouvée peut s'écrire, en général,

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{2} + \operatorname{tg} \frac{b}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2}}.$$

Où se trouve C lorsque l'un des points M, N est confondu avec A'?

Lorsque la droite MN est parallèle à  $y'Oy$ , quel point la relation trouvée permet-elle d'associer au couple M, N?

3. Exprimer  $\sin c$  et  $\cos c$  en fonction rationnelle de  $\sin a, \sin b, \cos a, \cos b$ .
4. On donne, sur le cercle, trois points, X, Y et Z, définis par

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OX}\right) = x, \quad \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OY}\right) = y, \quad \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OZ}\right) = z$$

( $x, y, z$  compris entre 0 et  $2\pi$ ). Au couple ( $X ; Y$ ) il correspond, d'après le 2., un « point associé » P; on note  $x \circ y$  l'angle  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP})$ .

De même, on notera Q le « point associé » au couple ( $Y ; Z$ ) et  $y \circ z$  l'angle  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OQ})$ .

On pose

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t_1, \quad \operatorname{tg} \frac{y}{2} = t_2, \quad \operatorname{tg} \frac{z}{2} = t_3.$$

Démontrer que

$$\operatorname{tg} \frac{(x \circ y) \circ z}{2} = \operatorname{tg} \frac{x \circ (y \circ z)}{2} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_1 t_2 t_3}{1 + t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3}.$$

Donner la construction, sur le cercle, des points U et V tels que

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OU}) = x \circ (y \circ z) \text{ et } (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OV}) = (x \circ y) \circ z,$$

à partir de  $X, Y, Z$ .

Énoncer la propriété géométrique correspondant à l'égalité trouvée.