

∞ Baccalauréat C Nice juin 1966 ∞
Mathématiques et mathématiques et technique

EXERCICE 1

On donne un angle quelconque xOy . Un point M décrit la demi-droite Ox . Un point N varie sur Oy de façon que $ON - OM = \ell$, ℓ étant une longueur donnée.

1. Trouver le lieu du milieu, α , du segment MN. (On peut utiliser la voie analytique, les axes étant Ox , Oy .)

2. On appelle β le point du segment MN tel que $\frac{\overrightarrow{M\beta}}{\overrightarrow{MN}} = k$, k étant un nombre donné.

Trouver le lieu de β quand M varie.

EXERCICE 2

On donne un repère orthonormé et le cercle de centre O (origine du repère), de rayon R et orienté dans le sens trigonométrique. On appelle A le point $(+R; 0)$ et A' le point $(-R; 0)$; M et N désignent deux points quelconques du cercle et l'on pose

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = a, \quad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}) = b,$$

a et b étant les mesures en radians des angles correspondants, comprises entre 0 et 2π .

1. Démontrer que l'équation de la droite MN peut s'écrire

$$x = \cos \frac{a+b}{2} + y \sin \frac{a+b}{2} - R \cos \frac{a-b}{2} = 0.$$

2. On suppose que la droite MN coupe l'axe $y'Oy$ en 1 et l'on appelle C le deuxième point où la droite AI recoupe le cercle. C sera appelé « point associé » au couple de points M, N et l'on pose $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = c$ (c compris entre 0 et 2π).

Former la relation liant les trois nombres a , b et c .

À cet effet, on formera d'abord l'équation de la droite AC, puis on exprimera que les droites MN et AC coupent $y'Oy$ au même point.

Montrer que la relation trouvée peut s'écrire, en général,

$$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{2} + \operatorname{tg} \frac{b}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{b}{2}}.$$

Où se trouve C lorsque l'un des points M, N est confondu avec A'?

Lorsque la droite MN est parallèle à $y'Oy$, quel point la relation trouvée permet-elle d'associer au couple M, N?

3. Exprimer $\sin c$ et $\cos c$ en fonction rationnelle de $\sin a$, $\sin b$, $\cos a$, $\cos b$.

4. On donne, sur le cercle, trois points, X, Y et Z, définis par

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OX}\right) = x, \quad \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OY}\right) = y, \quad \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OZ}\right) = z$$

(x, y, z compris entre 0 et 2π). Au couple ($X ; Y$) il correspond, d'après le 2., un « point associé » P; on note $x \circ y$ l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}\right)$.

De même, on notera Q le « point associé » au couple ($Y ; Z$) et $y \circ z$ l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OQ}\right)$.

On pose

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t_1, \quad \operatorname{tg} \frac{y}{2} = t_2, \quad \operatorname{tg} \frac{z}{2} = t_3.$$

Démontrer que

$$\operatorname{tg} \frac{(x \circ y) \circ z}{2} = \operatorname{tg} \frac{x \circ (y \circ z)}{2} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_1 t_2 t_3}{1 + t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3}.$$

Donner la construction, sur le cercle, des points U et V tels que

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OU}\right) = x \circ (y \circ z) \text{ et } \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OV}\right) = (x \circ y) \circ z,$$

à partir de X, Y, Z.

Énoncer la propriété géométrique correspondant à l'égalité trouvée.