

Baccalauréat C Nice juin 1977

EXERCICE 1

4 POINTS

Trouver tous les couples $(a ; b)$ d'entiers naturels non nuls, avec $a \leq b$, qui vérifient :

$$m + 10d = 142,$$

où m et d désignent respectivement le plus petit commun multiple (ppcm) et le plus grand commun diviseur (pgcd) de a et b .

EXERCICE 2

5 POINTS

1. Étudier la fonction numérique :

$$f : x \mapsto \text{Log}(1 - \text{Log } x)$$

Construire la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$).

2. Montrer que f est une bijection de son ensemble de définition sur un ensemble que l'on précisera.

Construire la courbe représentative C' de f^{-1} dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Exprimer la fonction f^{-1} au moyen de la fonction exponentielle de base e .

PROBLÈME

11 POINTS

Soit \mathbb{R}_+^* l'ensemble des réels strictement positifs.

À tout couple $(a ; b)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on associe l'application $f_{a,b}$ de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f_{a,b}(z) = e^a z + (\text{Log } b) \bar{z}$$

où Log désigne le logarithme népérien et \bar{z} le nombre complexe conjugué de z .

Partie A

On rappelle que \mathbb{C} est un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 2 et que $(1, i)$ en est une base.

- Démontrer que $f_{a,b}$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel \mathbb{C} et déterminer la matrice $M_{a,b}$ de $f_{a,b}$ dans la base $(1, i)$.
- Soit \mathcal{F} l'ensemble des applications $f_{a,1}$ lorsque a décrit \mathbb{R} .
Démontrer que (\mathcal{F}, \circ) est un groupe commutatif isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.
Quelle est la nature des éléments de \mathcal{F} ?
- Démontrer que l'ensemble des couples (a, b) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ pour lesquels $f_{a,b}$ n'est pas bijective, est l'ensemble défini par :

$$\begin{cases} b \in]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[\\ a = \text{Log}(|\text{Log } b|) \end{cases}$$

4. Pour tout élément b de $]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$, on pose :

$$g_b = f_{\text{Log}(|\text{Log } b|), b}$$

- a. Préciser la matrice N_b de g_b dans la base $(1, i)$ dans les deux cas suivants :

$$0 < b < 1 \quad \text{et} \quad b > 1$$

- b. Trouver la nature de $g_{\sqrt{e}}$ et de $g_{\frac{1}{\sqrt{e}}}$.

En déduire que, pour tout élément b de $]0; 1[\cup]1; +\infty[$, g_b est le composé de deux endomorphismes simples que l'on déterminera.

- c. On considère : $b > 1$ et on pose, pour tout entier naturel n :

$$u_n = [g_b(1)]^n.$$

Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

Étudier, suivant la valeur de b , la convergence de cette suite.

Partie B

Soit P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout couple $(a; b)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on désigne par $F_{a,b}$ l'application de P dans P qui, à tout point M , d'affixe z , associe le point M' , d'affixe $F_{a,b}(z)$.

1. Trouver l'ensemble E_1 des points M de P dont l'image par $F_{a,b}$ appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

Donner, suivant les couples $(a; b)$, la nature de E_1 .

2. Trouver l'ensemble E_2 des points M de P dont l'image par $F_{a,b}$ est un point dont l'affixe z' satisfait à :

$$\arg z' = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi).$$

3. Soit E_3 l'ensemble des points de P invariants par $F_{a,b}$. Déterminer E_3 pour les couples $(a; b)$ qui satisfont à :

$$e^a = 1 - \text{Log } b.$$