∽ Nice juin 1967 ∽
Baccalauréat mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Si a et b sont deux quelconques des chiffres de 0 à 9 (inclus), on considère le nombre entier N qui s'écrit de la manière suivante, à l'aide de 6 chiffres, dans le système habituel de numération (à base 10) :

$$N = ababab.$$

L'ensemble, E, des nombres N comprend 100 éléments (par exemple $N = 232\,323$, ou bien $N = 080\,808$).

1. Montrer que tous les nombres N appartenant à E admettent plusieurs diviseurs communs et, en particulier, qu'ils sont divisibles par 37.
2. Indiquer la liste complète des nombres entiers qui sont des diviseurs communs aux 100 éléments de E.

EXERCICE 2

Par rapport au repère orthonormé Ox, Oy, on définit deux points symétriques par rapport à O : le point A, de coordonnées $(a~;~b)$, et le point B, de coordonnées $(-a~;~-b)$, tels que l'on ait $ab \neq 0$.
Quel est l'ensemble des points M tels que les bissectrices de l'angle $\widehat{\text{A}M\text{B}}$ soient parallèles aux axes de coordonnées ?

EXERCICE 3

On donne une équation du second degré admettant, par hypothèse, deux racines réelles et distinctes :

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Les deux racines sont désignées par α et β.

Partie A

Dans cette question, on désigne par P la fonction qui fait correspondre à tout nombre réel x le nombre $ax + b$, où a et b sont deux nombres réels donnés.
À chaque couple $(a~;~b)$ correspond donc une fonction P.
On représente par $P(x)$ l'image de x par la fonction P, c'est-à-dire que l'on pose $P(x) = ax + b$.

1. Montrer qu'il existe toujours une fonction P et une seule telle que l'on ait

$$P(\alpha) = \text{A} \quad \text{et} \quad P(\beta) = \text{B},$$

où A et B sont deux nombres fixés arbitrairement.
On calculera les valeurs correspondantes de a et b à l'aide de α, β, A et B.

2. À chaque entier naturel n $(n \geqslant 0)$ on associe ainsi la fonction P_n , fonction P particulière, définie par les deux conditions

$$P_n(/alpha) = \alpha^n \quad \text{et} \quad P_n(\beta) = \beta^n.$$

On forme une autre fonction P, notée Q_n, définie par

$$Q_n = P_{n+1} - \alpha P_n.$$

Calculer $Q_n(\alpha)$ et $Q_n(\beta)$. En déduire que l'on a

$$(1) \qquad Q_n(x) = \beta^n(x-\alpha).$$

Montrer que l'on a les relations

$$Q_n = \beta Q_{n-1} \quad (n \geqslant 1)$$

$$\text{et} \quad (2) \quad P_{n+1} - sP_n + pP_{n-1} = 0.$$

Partie B

On désigne par u_n la dérivée (constante) de chaque fonction P_n.

1. Établir la relation

$$(3) \qquad u_n = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\beta - \alpha}.$$

2. Déduire, d'autre part, des égalités (1) et (2) entre binômes, les égalités numériques suivantes :
pour $n \geqslant 0$, et

$$(4) \quad u_{n+1} - \alpha u_n = \beta^n$$

$$\text{et} \quad (4') \quad u_{n+1} - \beta u_n = \alpha^n$$

et, pour $n \geqslant 1$,

$$(5) \qquad u_{n+1} - su_n + pu_{n-1} = 0.$$

Prouver, en conséquence, que les deux nombres α et β sont racines de toute équation de la forme

$$x^n = u_n x - pu_{n-1} \quad (n \geqslant 1).$$

3. Si n et m sont deux entiers naturels quelconques, on demande de vérifier la relation

$$u_{n+m} = u_n\alpha^m + u_m\beta^n.$$

[Il suffit d'utiliser les expressions analogues à (3).]
Établir finalement la formule suivante [qui généralise la formule (5)] :

$$(6) \qquad u_{n+m} = s \cdot u_n u_m - p.\left(u_n u_{m-1} + u_m u_{n-1}\right).$$

Partie C

Application à la résolution approchée d'une équation.

1. Expliquer la possibilité de calculer les termes successifs de la suite (u_n) en utilisant systématiquement la relation (5) à partir de $U_0 = 0$, $u_1 = 1$.
2. On suppose, pour fixer les idées, $|\alpha| < |\beta|$. Montrer, d'après (3), que la suite (x_n) dont le n-ième terme est

$$x_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad (n \geqslant 1)$$

admet une limite égale à β.

3. Montrer, en outre, d'après (4) et (4'), que les rapports successifs $\dfrac{x_n-\beta}{x_n-\alpha}$ forment une progression géométrique de raison $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

4. On donne, par exemple, l'équation

$$x^2-6x-1=0,$$

dont les racines sont

$$\alpha=3-\sqrt{10}<0 \quad \text{et} \quad \beta=3+\sqrt{10}>0.$$

Calculer les termes de la suite (u_n) correspondante pour $n \leqslant 5$, puis ceux de la suite (x_n) pour

$$1 \leqslant n \leqslant 4.$$

En utilisant l'égalité $\dfrac{x_2-\beta}{x_2-\alpha}=\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{x_1-\beta}{x_1-\alpha}$, montrer que β est compris entre x_1 et x_2. Montrer, plus généralement, que le nombre β est encadré par deux termes consécutifs quelconques de la suite (x_n).