∽ Baccalauréat Nice septembre 1966 ∾
série mathématiques élémentaires

I.

1. On donne, dans le plan, un cercle (C), de centre C rayon R, un point A, CA $= d \neq R$, et une droite (D) issue de A.
   Utiliser l'inversion ($\mathscr{J}$) de pôle A qui laisse (C) invariant pour étudier les cercles (Γ) tangents en A à (D) et tangents à (C).
   Construire ainsi avec soin les cercles (Γ) dans le cas de figure choisi.
   Discuter.
2. Le problème admet généralement deux solutions, (Γ_1) et (Γ_2). Soit T_1, T_2 les contacts avec (C).
   Calculer en fonction de α le rayon du cercle circonscrit au triangle ATIT2, en désignant par α l'angle aigu de (D) et AC.

II.

1. Représenter graphiquement, en système orthonormé Oxy, l'ensemble (E) des points M images des couples $(x\,;y)$ de réels, solutions du système

$$\left\{\begin{array}{lcr} x^2+y^2 & < & 2x+4, \\ x+3y & > & 6. \end{array}\right.$$

2. Calculer le volume V engendré par (E) en tournant autour de $x'x$.

III.

Partie A.

a, b étant deux entiers positifs donnés, on se propose de trouver l'ensemble, E, des couples $(x\;;\;y)$ entiers positifs vérifiant la relation

$$(1)\, ax - by = 1.$$

1. Montrer que, si a et b ne sont pas premiers entre eux, E est l'ensemble vide.
2. On suppose a et b premiers entre eux.
   a. Montrer que, si l'on divise par b les termes de la suite

$$a \quad 2a \quad 3a \quad \ldots \quad (b-1)a:$$

   i. aucun des restes obtenus n'est nul ;
   ii. tous les restes obtenus sont différents.

   En déduire que ces opérations fourniront un couple $(x\;;\;y)$ qui sera l'élément minimal $\left(x_0\;;\;y_0\right)$ de E, c'est-à-dire que, pour tout couple $(x\;;\;y)$ élément de E on a simultanément

$$x_0 \leqslant x, \quad y_0 \leqslant y.$$

   Appliquer au cas $a = 4$, $b = 5$.

b. Comparer une solution quelconque $(x~;~y)$ de (1) à la solution $\left(x_0~;~y_0\right)$ et montrer que E coïncide avec l'ensemble E$'$ des couples

$$\left\{\begin{array}{l c l}x' &=& x_0+kb,\\ y' &=& y_o+ka,\end{array}\right. \quad k \in [0, 1, 2, \ldots, n, \ldots].$$

Préciser E pour le cas $a = 4$, $b = 5$.

Partie B

On envisage maintenant l'équation

$$(2) \qquad aX - bY = c,$$

dans laquelle a et b sont entiers positifs premiers entre eux et c entier positif quelconque.
Montrer que l'étude précédente permet de trouver une partie de l'ensemble F des couples $(X~;~Y)$ entiers positifs solutions de (2) à partir de E. En particulier, donner la solution $\left(X'~;~Y'\right)$ déduite du couple $(X_0~;~Y_0)$ pour l'équation

$$(3) \qquad 4X - 5Y = 7.$$

Par une étude analogue à celle de la partie A, b., déterminer tout l'ensemble F pour ce cas particulier ; remarquer qu'alors $(X'~;~Y')$ n'est pas nécessairement l'élément minimal.
Trouver ce couple minimal $(X_0~;~Y_0)$

Partie C

Plus généralement, étudier l'équation

$$AX - BY = C,$$

dans laquelle A, B et C sont des entiers positifs donnés quelconques, X et Y des entiers positifs, à déterminer.

Application : Quel est l'ensemble, G, des solutions de

$$(4) \qquad 48X - 60Y = 30?$$

Quel est l'ensemble, H, des solutions de

$$(5) \qquad 20X - 25Y = 15?$$