

☞ Baccalauréat Nice septembre 1966 ☞
série mathématiques élémentaires

I.

1. On donne, dans le plan, un cercle (C), de centre C rayon R , un point A, $CA = d \neq R$, et une droite (D) issue de A.

Utiliser l'inversion ($\mathcal{I}$) de pôle A qui laisse (C) invariant pour étudier les cercles (Γ) tangents en A à (D) et tangents à (C).

Construire ainsi avec soin les cercles (Γ) dans le cas de figure choisi.

Discuter.

2. Le problème admet généralement deux solutions, (Γ_1) et (Γ_2). Soit T_1, T_2 les contacts avec (C).

Calculer en fonction de α le rayon du cercle circonscrit au triangle AT_1T_2 , en désignant par α l'angle aigu de (D) et AC.

II.

1. Représenter graphiquement, en système orthonormé Oxy , l'ensemble (E) des points M images des couples $(x; y)$ de réels, solutions du système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 2x + 4, \\ x + 3y > 6. \end{cases}$$

2. Calculer le volume V engendré par (E) en tournant autour de $x'x$.

III.

Partie A.

a, b étant deux entiers positifs donnés, on se propose de trouver l'ensemble, E, des couples $(x; y)$ entiers positifs vérifiant la relation

$$(1) ax - by = 1.$$

1. Montrer que, si a et b ne sont pas premiers entre eux, E est l'ensemble vide.
2. On suppose a et b premiers entre eux.

- a. Montrer que, si l'on divise par b les termes de la suite

$$a \quad 2a \quad 3a \quad \dots \quad (b-1)a :$$

- i. aucun des restes obtenus n'est nul;
ii. tous les restes obtenus sont différents.

En déduire que ces opérations fourniront un couple $(x ; y)$ qui sera l'élément minimal $(x_0 ; y_0)$ de E , c'est-à-dire que, pour tout couple $(x ; y)$ élément de E on a simultanément

$$x_0 \leq x, \quad y_0 \leq y.$$

Appliquer au cas $a = 4, b = 5$.

- b.** Comparer une solution quelconque $(x ; y)$ de (1) à la solution $(x_0 ; y_0)$ et montrer que E coïncide avec l'ensemble E' des couples

$$\begin{cases} x' &= x_0 + kb, \\ y' &= y_0 + ka, \end{cases} \quad k \in [0, 1, 2, \dots, n, \dots].$$

Préciser E pour le cas $a = 4, b = 5$.

Partie B

On envisage maintenant l'équation

$$(2) \quad aX - bY = c,$$

dans laquelle a et b sont entiers positifs premiers entre eux et c entier positif quelconque. Montrer que l'étude précédente permet de trouver une partie de l'ensemble F des couples $(X ; Y)$ entiers positifs solutions de (2) à partir de E . En particulier, donner la solution $(X' ; Y')$ déduite du couple $(X_0 ; Y_0)$ pour l'équation

$$(3) \quad 4X - 5Y = 7.$$

Par une étude analogue à celle de la partie A, b., déterminer tout l'ensemble F pour ce cas particulier; remarquer qu'alors $(X' ; Y')$ n'est pas nécessairement l'élément minimal. Trouver ce couple minimal $(X_0 ; Y_0)$

Partie C

Plus généralement, étudier l'équation

$$AX - BY = C,$$

dans laquelle A, B et C sont des entiers positifs donnés quelconques, X et Y des entiers positifs, à déterminer.

Application : Quel est l'ensemble, G , des solutions de

$$(4) \quad 48X - 60Y = 30?$$

Quel est l'ensemble, H , des solutions de

$$(5) \quad 20X - 25Y = 15?$$