∽ Baccalauréat Nice septembre 1967 ∾
Mathématiques élémentaires

I.

On désigne par X l'ensemble des points $(x\,;\ y)$ du plan vérifiant l'inégalité $x^2+y^2 < 1$, par Y l'ensemble de points $(x\,;\ y)$ tels que $|x| < 1$ et $|y| < 1$ et par Z l'ensemble des points $(x\,;\ y)$ tels que $|x|+|y| < 1$.

1. Déterminer X, Y et Z.
2. Démontrer les inclusions :

$$\mathrm{Z} \subset \mathrm{X} \quad \text{et} \quad \mathrm{X} \subset \mathrm{Y}.$$

II.

1. Développer $(k+1)^5$.
2. On suppose $k = 12$. Écrire le nombre 13^5 dans le système de numération de base 12.

III.

1. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
   Soit E l'ensemble des quatre nombres complexes 1, i, -1, $-$i.
   Former la table de multiplication dans $\mathbb{C}$ de ces quatre nombres.
   Constater que la loi de composition ainsi définie est une loi de composition interne dans E.
   En déduire que E, muni de cette loi de composition, est un groupe abélien.
2. α et β étant deux nombres complexes on considère l'application F de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par la relation

$$\mathrm{F}(z) = \alpha z+\beta.$$

   On suppose $\alpha \neq 0$. Montrer que F est biunivoque.
   À quelles conditions l'application composée $\mathrm{F} \circ \mathrm{F}$ est-elle l'application identique de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$?
   Dans le cas où $\alpha = -\mathrm{i}$ et $\beta = 3\mathrm{i}$, calculer les images respectives, a, b, c et d, par F des nombres 1, i, -1 et $-$i.
3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}x,\ \mathrm{O}y)$ on note A, B, C et D les points images respectives par F des nombres a, b, c et d.
   Soit P le point dont les coordonnées sont 5 et $\dfrac{1}{5}$.
   Les droites AD et AB rencontrent la droite PC en δ et δ' respectivement; les droites CD et CB rencontrent la droite PA en γ et γ' respectivement.
   En utilisant le groupe commutatif des homothéties de centre P, montrer que les droites $\gamma\delta$ et $\gamma'\delta'$ sont parallèles.
4. Soit (Γ) la ligne polygonale ABCDA.
   Déterminer les abscisses des points d'intersection, R et S, de l'axe Ox et des droites DA et BC.
   On désigne par N un point qui décrit la ligne (Γ) et par M un point variable sur la droite Ox, d'abscisse x.
   On note $f(x)$ *la plus courte des distances* du point M, supposé fixe, aux divers points N de (Γ).
   Montrer que :

quand M appartient au segment fermé [OR], $f(x)$ est égale à MA ;

quand M appartient au segment [RS], $f(x)$ est égale à la distance de M à la droite AB ;

quand M appartient à la demi-droite fermée [Sx[, $f(x)$ est égale à MB.

(Le candidat qui n'aura pas su établir ces résultats les adoptera pour la suite du problème.)

Calculer $f(x)$.

Étudier les variations de la fonction $x \longmapsto f(x)$ quand M décrit l'axe $x'x$ et construire sa représentation graphique.