Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Niger juin 1969 ∽

EXERCICE 1

Trouver les différentes valeurs de

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}-(ax+b)\right],$$

où a et b sont des paramètres réels.

EXERCICE 2

Z et z désignent deux nombres complexes d'images respectives M et m.
On considère l'application

$$Z=\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right).$$

Déterminer les points doubles, A et A$'$, de la transformation ponctuelle qui, à m, fait correspondre le point M. Soit O le milieu de AA$'$. Le point m, image de z, étant donné, comment peut-on construire n, image de $-\dfrac{1}{z}$, puis M, image de Z ?

PROBLÈME

On considère l'ensemble, M_1, des tableaux de la forme
$T=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, où a, b, c et d sont les nombres réels, appelés éléments du tableau T.
$T=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ et $T'=\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}$ seront dits égaux si, et seulement si,

$$a=a',\quad b=b',\quad c=c'\quad \text{et } d=d'.$$

Dans l'ensemble M_1 on définit les deux lois suivantes :

— une loi interne, appelée addition :

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+a' & b+b'\\ c+c' & d+d'\end{pmatrix}$$

— une loi externe, appelée multiplication par un scalaire :

$$k.\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka & kb\\ kc & kd\end{pmatrix},\quad \text{avec } k\in\ R.$$

1. Démontrer que M_1 muni de ces deux lois est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. On pose

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ - & -1\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

et l'on construit l'ensemble, M_2 forme des tableaux de la forme

$$T=a.\mathrm{I}+b.\mathrm{A},$$

où a et b sont des paramètres réels.

a. Montrer que, pour que deux éléments,

$$T = a.\mathrm{I} + b.\mathrm{A} \quad \text{et} \quad T' = a'.\mathrm{I} + b'.\mathrm{A},$$

soient égaux, il faut et il suffit que l'on ait

$$a = a' \quad \text{et} \quad b = b'.$$

b. Montrer que M_2 a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3. On considère l'application f de M_2 dans lui-même telle que

$$f :: M_2 \to M_2 \quad T = a.\mathrm{I} + b.\mathrm{A} \longmapsto f(T) = a.\mathrm{I} - b.\mathrm{A}.$$

a. Montrer que f est bijective.

b. Montrer que $f(T + T') = f(T) + f(T')$.

c. Montrer que $f(k.T) = kf(T)$.

4. On désigne par M_3 le sous-ensemble de M_1 des tableaux dont les éléments sont pris dans l'ensemble, $\mathbb{Z}$, des entiers relatifs.

a. Montrer que M_3 est un sous-groupe additif de M_1.

b. Ma est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

5. On désigne par M_4 le sous-ensemble des tableaux de M_3 dont les éléments vérifient la relation $ad - bc = 1$.

$\mathbb{Q}$ étant l'ensemble des rationnels et $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de M_4 on établit la correspondance suivante :

$$U_T : \quad \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2, \quad (x\,;\,y) \longmapsto (X\,;\,Y),$$

telle que

$$\left\{\begin{array}{lcl} X & = & ax + by, \\ Y & = & cx + dy. \end{array}\right.$$

On écrit $(X\,;\,Y) = U_T(x\,;\,y)$ et l'on dit que U_T est la correspondance associée au tableau T.

a. Quel est le tableau de la transformation identique ?
Est-ce un élément de M_4 ?

b. Exprimer x et y en fonction de X et Y et en conclure que, si $(X\,;\,Y) = U_T(x\,;\,y)$, alors $(x\,;\,y) = U_{T'}(x\,;\,y)$, avec $T' \in M_4$.

c. Quel est le tableau associé à la composée, $U_{T_2} \circ U_{T_1}$ des applications U_{T_1} et U_{T_2} de tableaux associés T_1 et T_2 ?
Quel est celui de $U_{T_1} \circ U_{T_2}$?
Peut-on écrire l'égalité de ces tableaux ? Conclusion.