Baccalauréat S Nouvelle–Calédonie décembre 1998

Exercice 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Dans une foire, une publicité annonce : « Un billet sur deux est gagnant. Achetez deux billets ».
Dans cet exercice, on suppose qu'effectivement, sur le nombre de billets en vente, exactement un billet sur deux est gagnant. Xavier est toujours le premier acheteur de la journée.

Partie A

Il est mis en vente chaque jour cent billets.

1. Xavier acheté deux billets. Calculer la probabilité qu'il achète au moins un billet gagnant.
   Le résultat sera donné sous forme d'une fraction irréductible, puis à 10^{-3} près.
2. Xavier revient chaque jour, pendant trois tours, acheter deux billets. Quelle est la probabilité qu'il achète au moins un billet gagnant sur les trois jours ?
   Le résultat sera donné à 10^{-3} près.
3. Un autre tour, Xavier achète six billets Quelle est la probabilité qu'il achète au moins un billet gagnant Le résultat sera donné à 10^{-3} près.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul.
Désormais, il est mis en vente $2n$ billets. Xavier achète deux billets.

1. Démontrer que la probabilité p_n, qu'il achète au moins un billet gagnant est $p_n = \dfrac{3n-1}{2(2n-1)}$.
2. **a.** Étudier les variations de la suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
   b. Déterminer la limite de p_n, quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 (obligatoire) **5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$(unité graphique : 2 cm).
Soit A le point d'affixe 4. On note d la droite d'équation $x = 4$, privée du point A.
À tout point M, différent de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' , tel que,

$$z' = \frac{z-4}{4-\overline{z}}.$$

1. **a.** Soit B le point d'affixe $1+3\text{i}$.
   Déterminer l'affixe du point B$'$ associé au point B.
   Placer les points B et B$'$ sur une figure.
   b. Soit x un nombre réel différent de 4. On note R le point d'affixe x.
   Déterminer l'affixe du point R' associé au point R.
   Placer R' sur la figure.
   c. Soit y un nombre réel non nul. On note S le point de d d'affixe $4+\text{i}y$. Déterminer l'affixe du point S' associé à S.
   Placer S' sur la figure.
   d. Démontrer que $z' = 1$ si et seulement si $M \in d$.
2. Soit M un point n'appartenant pas à d, différent de A.
   On se propose de déterminer une méthode de construction du point M' connaissant le point M.

a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de 4, $\left|z'\right| = 1$.

b. Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de 4, $\dfrac{z'-1}{z-4} \in \mathbb{R}$.

Montrer que la droite $\left(S'M'\right)$ est bien définie et parallèle à la droite (AM).

c. Déduire des questions 2. a et 2. b, une construction géométrique du point M' connaissant le point M.

Appliquer cette méthode à la construction du point C$'$ associé au point C d'affixe $2+\text{i}$.

Exercice 2 (spécialité) **5 points**

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 5 cm). On considère les points A d'affixe $\sqrt{2}$, et B d'affixe i. Soit C te point tel que OACB soit un rectangle. On note I le milieu du segment [OA], J le milieu du segment [BC] et K le milieu du segment [AI].
Placer ces points sur une figure.

1. On considère la transformation s de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z', tel que

$$z' = -\text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}.$$

a. Démontrer que s est une similitude dont le centre Ω a pour affixe $\dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{1}{3}\text{i}$ et dont on déterminera le rapport k et une mesure θ de l'angle.

b. Déterminer les images par s des points O, A, B, C.

2. **a.** Calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega\text{B}}, \overrightarrow{\Omega\text{B}}\right)$.

En déduire que les points A, B et Ω sont alignés.

b. Démontrer de même que les points I, C, Ω sont alignés.

c. En déduire une construction de Ω. Placer Ω sur la figure.

3. **a.** Montrer que Ω appartient aux cercles Γ_1 et Γ_2 de diamètres respectifs [BC] et [AI].

b. Démontrer que $\overrightarrow{\text{J}\Omega}$ et $\overrightarrow{\text{JK}}$ sont colinéaires.

c. Démontrer que la droite (ΩO) est la tangente commune à Γ_1 et Γ_2.

Représenter les cercles Γ_1, Γ_2 et la droite (ΩO) sur la figure.

Problème **11 points**

Partie A : Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{e}^{-x}(\cos x + \sin x)$$

1. **a.** Exprimer $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

En déduire que, pour tout nombre réel x, on a :

$$f(x) = \sqrt{2}\text{e}^{-x}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

c. Justifier que la limite de f en $+\infty$ est 0.

2. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = -2\text{e}^{-x}\sin x$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.

3. On note I l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{7\pi}{4}\right]$.

   a. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle I et dresser le tableau de variation de f sur I.

   b. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 2,5 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée).
   Tracer la partie de $\mathcal{C}$ correspondant aux points dont l'abscisse appartient à l'intervalle I.

Partie B : Calcul d'intégrales

1. **a.** Démontrer qu'une primitive de f est $\left(-f - \dfrac{1}{2}f'\right)$.

   b. En déduire que la fonction G, définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = -\text{e}^{-x}\cos x$, est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   c. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $G(x+\pi) = -\text{e}^{-\pi}G(x)$.

2. On considère la suite (I_k) définie pour tout $k \in \mathbb{N}$, par

$$I_k = \int_{-\frac{\pi}{4}+k\pi}^{\frac{3\pi}{4}+k\pi} f(x)\,\text{d}x.$$

   a. Calculer I_0 et I_1.

   b. Interpréter géométriquement $|I_0| + |I_1|$.

   c. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_{k+1} = -\text{e}^{-\pi}I_k$.
   En déduire l'expression de I_k en fonction de k et de I_0.