

❧ Baccalauréat L Nouvelle-Calédonie ❧
Épreuve de spécialité - novembre 2005
Durée : 3 heures

EXERCICE 1

8 points

Rappels sur la fonction logarithme népérien, notée \ln :

a et b étant des réels strictement positifs et n un entier naturel :

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \quad ; \quad \ln(a^n) = n \ln a.$$

Partie A :

Sur la **feuille annexe à rendre avec la copie** on a tracé dans un repère orthonormal la courbe (\mathcal{C}) représentant la fonction logarithme népérien et la parabole (\mathcal{P}) représentant la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa fonction dérivée.

1.
 - a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
 - b. En déduire le tableau de variation de la fonction f . (On ne demande pas les limites de f à l'infini.)
 - c. Quelles sont les coordonnées exactes du point S sommet de la parabole (\mathcal{P}) ?
2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - \ln x = 2x^2 - 3x + \frac{9}{2} - \ln x$$

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

- a. Montrer que, pour tout réel strictement positif x : $g'(x) = \frac{(4x+1)(x-1)}{x}$.
- b. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
Justifier que le minimum de g est égal à $\frac{7}{2}$.
- c. En déduire que pour tout réel strictement positif x : $f(x) - \ln x > 0$.
Quelle propriété des courbes (\mathcal{P}) et (\mathcal{C}), visible graphiquement, le résultat ci-dessus permet-il de justifier ?

Partie B :

Pour tout réel strictement positif x , on note M le point de la courbe (\mathcal{P}) d'abscisse x et N le point de la courbe (\mathcal{C}) de même abscisse x . On a ainsi : $MN = f(x) - \ln x = g(x)$. (la longueur MN est exprimée dans l'unité graphique du schéma de **feuille annexe**.)

1. Placer les points M et N sur le schéma de la **feuille annexe** lorsque $x = 2$.
2. Montrer que lorsque $x = \frac{3}{4}$ on a : $MN = \frac{27}{8} + 2 \ln 2 - \ln 3$.
Donner la valeur de MN arrondie au centième.
3.
 - a. À l'aide de la **partie A**, déterminer pour quelle valeur de x , la longueur MN est minimale. Que vaut alors cette longueur ?
 - b. Tracer en rouge sur le schéma de la **feuille annexe** le segment $[MN]$ correspondant.
4. Quelle est la limite de la longueur MN quand x tend vers 0 (avec $x > 0$) ?

EXERCICE 2

6 points

Rappels :Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme U_1 .On a alors pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $U_n = U_1 \times q^{n-1}$.Soit (V_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme V_1 .On a alors pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $V_n = V_1 + (n-1)r$.

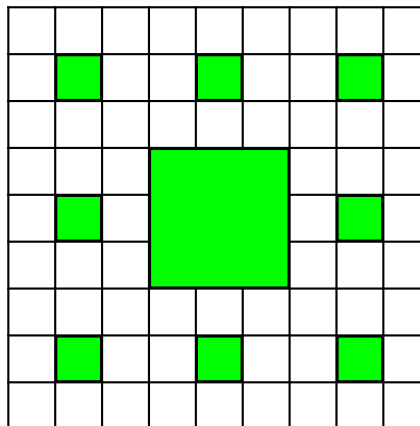
Un carré d'aire 1 m^2 est divisé en 9 carrés égaux comme indiqué sur la figure ci-contre.

On colorie le carré central. (1^{er} coloriage)

Les huit carrés restant sont à leur tour divisés en 9 carrés égaux comme indiqué sur la figure ci-contre.

On colorie les huit carrés centraux obtenus. (2^e coloriage)

On poursuit avec la même méthode la division et le coloriage du carré.



Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par A_n l'aire en m^2 de la surface totale coloriée après n coloriations. On a ainsi : $A_1 = \frac{1}{9}$.

La surface grisée sur le figure ci-dessus a donc pour aire A_2 .

On remarquera que chaque étape du coloriage consiste à colorier un neuvième de la surface non coloriée jusque là.

1.
 - a. Justifier que $A_2 = A_1 + \frac{1}{9}(1 - A_1)$ puis calculer la valeur numérique exacte de A_2 .
 - b. Expliquer pourquoi, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $A_{n+1} = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}$.
2. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $B_n = A_n - 1$.
 - a. Calculer B_1 .
 - b. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $B_{n+1} = \frac{8}{9}B_n$.
 - c. Quelle est la nature de la suite (B_n) ?
Exprimer alors, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le terme général B_n de la suite (B_n) en fonction de n .
3.
 - a. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $A_n = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$.
 - b. Calculer alors la limite de la suite (A_n) . Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 3

6 points

Une horloge électronique a été programmée pour émettre un bip toutes les sept heures. Le premier bip est émis le 31 décembre 2004 à minuit.

1.
 - a. À quelle heure est émis le dernier bip du 1^{er} janvier 2005 ?
 - b. À quelle heure est émis le premier bip du 2 janvier 2005 ?
 - c. À quelle heure est émis le dernier bip du 2 janvier 2005 ?
 - d. À quelle heure est émis le premier bip du 3 janvier 2005 ?

Expliquer les réponses.

2.
 - a. Montrer que : $24 \equiv 3 \pmod{7}$.
 - b. En déduire le reste de la division euclidienne de 2×24 par 7 et le reste de la division euclidienne de 3×24 par 7. Justifier les réponses. Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reste de la division euclidienne de $n \times 24$ par 7				5	1	4	0	3	6	2

- c. Expliquer pourquoi l'horloge émet un bip à minuit tous les 7 jours et tout les 7 jours seulement.
3. On rappelle que l'année 2005 est une année non bissextile et comporte donc 365 jours.
 - a. Déterminer le plus petit entier naturel a tel que : $365 \equiv a \pmod{7}$
 - b. À quelle date l'horloge émettra-t-elle un bip à minuit pour la dernière fois en 2005 ?
Expliquer la réponse.

ANNEXE à l'exercice 1 (à rendre avec la copie)

