Baccalauréat série S Nouvelle-Calédonie mars 2001

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+9}\right).$$

et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique relative à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les images de 0 et de 4 par f, puis l'antécédent de 0 par f.
   - **a.** Calculer la limite de f en $+\infty$.
   - **b.** Montrer que, pour tout x réel, $\sqrt{x^2+9} + x = \dfrac{9}{\sqrt{x^2+9} - x}$ et en déduire la limite de f en $-\infty$.
2. Montrer que, pour tout réel, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}}$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. On considère la fonction g définie, pour tout x réel, par

   $$g(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} - \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-x}$$

   et $(\mathscr{C}')$ sa représentation graphique dans le même repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   - **a.** Démontrer que, pour tout x réel, $(g \circ f)(x) = x$.
     On admettra de même que, pour tout x réel, $(f \circ g)(x) = x$.
   - **b.** En déduire que le point $M(x\ ;\ y)$ appartient à $(\mathscr{C})$ si, et seulement si, le point $M'(y\ ;\ x)$ appartient à $(\mathscr{C}')$.
   - **c.** Démontrer que la fonction g est négative sur $[0\ ;\ \ln 3]$.
4. Soit D_1 et D_2 les domaines définis par :

   $$D_1 = \left\{ M(x\ ;\ y) \left| \begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant \ln 3 \\ g(x) \leqslant y \leqslant 0 \end{array} \right. \right\} \quad ; \quad D_2 = \left\{ M(x\ ;\ y) \left| \begin{array}{l} -4 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{array} \right. \right\}.$$

   Les domaines D_1 et D_2 ont la même aire, calculer cette valeur commune en unités d'aire.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points A (1 ; 2 ; 2), B (3 ; 2 ; 1) et C (1 ; 3 ; 3).

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan. Donner une équation de ce plan.
2. On considère les plans (P_1) et (P_2) d'équations respectives :
   $(\mathrm{P}_1) : x - 2y + 2z - 1 = 0$; $(\mathrm{P}_2)\ :\ x - 3y + 2z + 2 = 0$.
   - **a.** Montrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants. On notera (Δ) leur droite d'intersection.
   - **b.** Montrer que le point C appartient à la droite (Δ).

c. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{u}(2~;~0~;~-1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ).

d. En déduire une représentation paramétrique de la droite (Δ).

3. Pour déterminer la distance du point A à la droite (Δ) de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l c r}x & = & 2k+1\\ y & = & 3\\ z & = & -k+3\end{array}\right. \qquad (k \in \mathbb{R}),$$

on considère le point M de paramètre k de la droite (Δ).

a. Déterminer la valeur de k pour que les vecteurs $\overrightarrow{\text{A}M}$ et $\overrightarrow{u}$ soient orthogonaux.

b. En déduire la distance du point A à la droite (Δ).

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans tout l'exercice, x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$.
S est l'ensemble des couples $(x~;~y)$ tels que P.G.C.D. $(x~;~y) = y - x$.

1. a. Calculer le P.G.C.D. (363 ; 484).

b. Le couple (363 ; 484) appartient-il à S ?

2. Soit n un entier naturel non nul ; le couple $(n~;~n+1)$ appartient-il à S ? Justifier votre réponse.

3. a. Montrer que $(x~;~y)$ appartient à S si, et seulement si, il existe un entier naturel k non nul tel que $x = k(y-x)$ et $y = (k+1)(y-x)$.

b. En déduire que, pour tout couple $(x~;~y)$ de S, on a :
P.P. C.M. $(x~;~y) = k(k+1)(y-x)$.

4. a. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

b. En déduire l'ensemble des couples $(x~;~y)$ de S tels que P.P.C.M. $(x~;~y) = 228$.

PROBLÈME **10 points**

Il est possible que certains des résultats, à démontrer dans ce problème, ne soient pas lisibles sur l'écran de votre calculatrice graphique.

Partie A

⋆ **Étude d'une fonction**

On considère la fonction f définie sur $]0~;~1[\cup]1~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{10(x-8)}{x(x-1)}$$

et on désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative relative à un repère orthogonal $\left(\text{O},~\overrightarrow{\imath},~\overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Déterminer les limites de f quand x tend vers 1 par valeurs inférieures et quand x tend vers 1 par valeurs supérieures.

c. En déduire les asymptotes à la courbe $(\mathscr{C})$.

2. a. Déterminer la dérivée f' de la fonction f.

b. Montrer que $f'(x)$ s'annule pour $\alpha = 8 + 2\sqrt{14}$ et pour $\beta = 8 - 2\sqrt{14}$.

c. Dresser le tableau de variation de f

3. Soit I le point de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

a. Déterminer une équation de la droite (Δ) tangente en I à la courbe $(\mathscr{C})$.

b. Montrer que le point L, intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec son asymptote horizontale, appartient à la droite (Δ).

c. Représenter la partie de la courbe $(\mathscr{C})$ pour les valeurs de x strictement supérieures à 1 (unités graphiques : 1 cm en abscisse et 3 cm en ordonnée).

4. a. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x élément de l'intervalle $]1~;~+\infty[$, on ait $f(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$.

b. Soit λ un nombre réel strictement supérieur à 8.
Calculer, en unités d'aire, en fonction de λ, l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 8$ et $x = \lambda$.

c. Calculer la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Partie B

$\star$ **Probabilités**

Une urne contient n boules $(n > 8)$ dont 3 jaunes et 5 vertes.
Les autres boules sont rouges.
I. Étude d'un cas particulier : $n = 16$. Il y a donc 8 boules rouges.

1. On tire une boule de l'urne, on note sa couleur, on la remet, puis on effectue un nouveau tirage d'une boule.
Déterminer la probabilité des évènements suivants :
— A : « On obtient deux boules rouges »,
— B : « On obtient une boule rouge puis une boule verte ou une boule verte puis une boule rouge »,
— C : « On obtient une boule rouge puis une boule jaune ou une boule jaune puis une boule rouge »,
— D : « On obtient au moins une boule rouge ».

2. On effectue maintenant un *tirage simultané de deux boules* de l'urne.
Déterminer la probabilité des évènements :
— A$'$ « On obtient deux boules rouges »,
— B$'$ « On obtient une boule rouge et une boule verte ».

II. n quelconque $(n > 8)$ Il y a donc $(n - 8)$ boules rouges.

1. Comme dans le cas particulier précédent, on tire une boule de l'urne, on note sa couleur, on la remet, puis on effectue un nouveau tirage d'une boule. Déterminer en fonction de n la probabilité de l'évènement :
« Obtenir une boule rouge puis une boule verte, ou une boule verte puis une boule rouge ».

2. On revient au **tirage simultané de deux boules :**

a. Déterminer en fonction de n la probabilité de l'évènement :
« Obtenir deux boules rouges ».

b. Calculer, en fonction de n, la probabilité p_n de l'évènement :
« Obtenir une boule rouge et une boule verte ».

c. En utilisant les variations de la fonction f étudiée dans la partie **A**, indiquer les valeurs de n qui rendent p_n maximum, puis indiquer la valeur de ce maximum.