**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat C Nouvelle-Calédonie décembre 1992

**EXERCICE 1** **4 points**

On donne, dans le plan, un quadrilatère convexe ABCD. Les diagonales [AC] et [BD] se coupent en E.
Soit F le point tel que : $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BE}$.

1. Comparer les distances BD et EF, puis les aires des triangles ABD et AEF.
2. Montrer que le quadrilatère ABCD et le triangle AFC ont même aire.
3. Démontrer l'égalité : $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$.
   En déduire l'aire du quadrilatère ABCD à l'aide d'une expression faisant intervenir les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

**EXERCICE 2** **4 points**
**Enseignement obligatoire**

Le plan complexe P est rapporté au sepère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

1. Déterminer et représenter dans le plan P, l'ensemble D des points $M$ dont l'affixe $z$ vérifie :

$$z - \text{i}\overline{z} = 0.$$

2. Au point $M$ d'affixe $z = x + \text{i}y$ ($x$ et $y$ désignant des nombres réels distincts), on fait correspondre le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par :

$$z' = f(z) = \frac{z + \overline{z} - \text{i}}{z - \text{i}\overline{z}}.$$

   **a.** Calculer le module de $f(\text{i})$.
   Donner un argument de $f(\text{i})$. En déduire que $[f(\text{i})]^8$ est un nombre réel positif>.

   **b.** Déterminer les parties réelle et imaginaire du nombre complexe $z$ vérifiant $f(z) = \text{i}$.

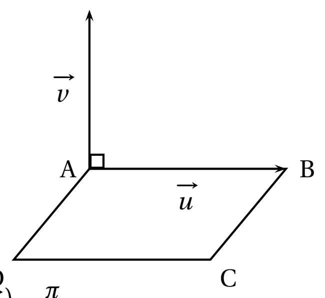
3. **a.** Calculer les coordonnées du point $M'$ en fonction de celles du point $M$.

   **b.** Déterminer et représenter dans le plan P l'ensemble des points $M$ tels que $z'$ soit un imaginaire pur.

**EXERCICE 2** **4 points**
**Enseignement de spécialité**

Dans le plan, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{A}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, soit ABCD un parallélogramme tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{u}$.
On note E le point d'affixe : $1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\text{i}$.

Soit F l'image de C par la similitude directe $f$ de centre B, de rapport $\dfrac{1}{2}$, et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.




1. Vérifier que $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ et montrer que le triangle BCF est rectangle en F.
   Faire une figure soignée.
2. On note $t$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et $g$ la similitude directe de centre E qui transforme A en B.
   Montrer que $g = f \circ t$ : on pourra, pour cela, soit utiliser les transformations vectorielles associées à $g$ et $f \circ t$, soit déterminer leurs expressions analytiques complexes.
3. Montrer que $g$ transforme D en F.
   En déduire la nature et les angles du triangle EDF.

**PROBLÈME** **12 points**

Le but de ce problème est d'étudier certaines fonctions $f_k$ de la variable réelle $x$ définies sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f_k(x) = x\text{e}^{-x} + kx$$

où $k$ est un réel donné quelconque, et de construire leurs courbes représentatives $\mathcal{C}_k$.

**Partie A**

1. Étude de $f_k$
   **a.** Déterminer selon les valeurs du réel $k$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_k$.
   Montrer que la droite $D_k$ d'équation $y = kx$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe $\mathcal{C}_k$ ?
   Préciser la position de $\mathcal{C}_k$ par rapport à $D_k$.
   **b.** Calculer $f_k'(x)$ et $f_k''(x)$.
   Donner selon les valeurs du réel $k$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_k'(x)$.
   Donner le sens de variations de $f_k$.
2. Donner les tableaux de variations de $f_0$ et $f_1$.
3. Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$. Pour le dessin, on choisit pour unité 5 cm.
   **a.** Donner les coefficients directeurs des tangentes à l'origine $T_0$ et $T_1$ respectivement à $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.
   **b.** Construire les tangentes $T_0$ et $T_1$ les asymptotes $D_0$, $D_1$ et les courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.
4. Pour tout $a$ de $[0~;~+\infty[$, on pose $F(a) = \displaystyle\int_0^a f_0\,\text{d}(x)$.
   **a.** À l'aide d'une intégration par parties, calculer $F(a)$.
   **b.** Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(a)$.

**Partie B**

Le but de cette partie est d'étudier la fonction $f_k$ obtenue pour $k = -\dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire la fonction $f_{-\frac{1}{2}}$ définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par

$$f_{-\frac{1}{2}}(x) = x\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}x.$$

1. **a.** Calculer $f_{-\frac{1}{2}}(x)$. Montrer que l'équation

$$(1-x)\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2} = 0$$

admet une solution unique dans l'intervalle $[0~;~+\infty[$. On note $\alpha$ cette solution (que l'on ne demande pas de calculer).

**b.** Vérifier l'encadrement : $0 \leqslant \alpha \leqslant 0,5$.

2. Soit $h$ la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left[0~;~\dfrac{1}{2}\right]$ par

$$h(x) = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}.$$

**a.** Montrer que $\alpha$ est l'unique solution sur I de l'équation $h(x) = x$.

**b.** Déduire des variations de $h$ que pour tout élément $x$ de I, $h(x)$ appartient encore à I.

**c.** Prouver que pour tout élément $x$ de I on a

$$-0,83 \leqslant h'(x) \leqslant 0.$$

En déduire l'inégalité

$$|h(x) - \alpha| \leqslant 0,83|x - \alpha|.$$

3. Soit $(u_n)$ la suite d'éléments de I, définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$.

**a.** Montrer que pour tout entier $n$, positif ou nul, on a

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,83\,|u_n - \alpha|.$$

**b.** En déduire que pour tout entier $n$, positif ou nul, on a

$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}(0,83)^n.$$

**c.** Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**d.** Préciser un entier $p$ tel que : $\left|u_p - \alpha\right| < 10^{-2}$.
Calculer $u_p$ à l'aide de votre calculatrice (on donnera la partie entière et les deux premières décimales).

4. Donner le tableau de variations de la fonction $f_{-\frac{1}{2}}$.
Construire l'asymptote $D_{-\frac{1}{2}}$, la tangente $T_{-\frac{1}{2}}$, et la courbe $\mathscr{C}_{-\frac{1}{2}}$.