

## ☞ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie décembre 2001 ☞

### EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

#### Partie I

L'espace  $E$  est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Les points  $A, B, C$  et  $D$  ont pour coordonnées respectives :

$$(-1; 0; 2), \quad (3; 2; -4), \quad (1; -4; 2), \quad (5; -2; 4).$$

On considère les points  $I, J$  et  $K$  définis par :  $I$  est le milieu du segment  $[AB]$ ,  $K$  est le milieu du segment  $[CD]$  et  $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BC}$ .

- Déterminer les coordonnées des points  $I, J$  et  $K$ .
- Montrer que les points  $I, J$  et  $K$  ne sont pas alignés.
  - Justifier qu'une équation cartésienne du plan  $(IJK)$  est :

$$8x + 9y + 5z - 12 = 0.$$

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(AD)$  et montrer que le plan  $(IJK)$  et la droite  $(AD)$  sont sécants en un point  $L$  dont on déterminera les coordonnées.
- Montrer que :

$$\vec{AL} = \frac{1}{4}\vec{AD}.$$

#### Partie II

Plus généralement, dans l'espace  $E$ , on considère un tétraèdre  $ABCD$  ainsi que les points  $I, J, K$  et  $L$  définis par  $I$  est le milieu du segment  $[AB]$ ,  $K$  est le milieu du segment  $[CD]$ .

$$\vec{AL} = \frac{1}{4}\vec{AD} \quad \text{et} \quad \vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BC}$$

Soit  $G$  le barycentre de  $(A, 3), (B, 3), (C, 1), (D, 1)$ .

- Déterminer les barycentres de  $\{(A, 3), (D, 1)\}$  et le barycentre de  $\{(B, 3), (C, 1)\}$ .
- En associant les points  $A, B, C$  et  $D$  de deux façons différentes, montrer que  $G$  appartient aux droites  $(IK)$  et  $(JL)$ . En déduire que les points  $I, J, K$  et  $L$  sont coplanaires.

### EXERCICE 2

5 points

Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , unité graphique : 4 cm. Dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes,  $i$  désigne le nombre de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ .

Soit  $A$  le point d'affixe  $z_A = -i$  et  $B$  le point d'affixe  $z_B = -2i$ .

On appelle  $f$  l'application qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ ,  $M$  distinct de  $A$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par  $z' = \frac{iz - 2}{z + i}$ .

1. Démontrer que, si  $z$  est un imaginaire pur,  $z \neq -i$ , alors  $z'$  est imaginaire pur.
2. Déterminer les points invariants par l'application  $f$ .
3. Calculer  $|z' - i| \times |z + i|$ .  
Montrer que, quand le point  $M$  décrit le cercle de centre  $A$  et de rayon 2, le point  $M'$  reste sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
4. a. Développer  $(z + i)^2$ , puis factoriser  $z^2 + 2iz - 2$ .  
b. Déterminer et représenter l'ensemble des points  $M$ , tels que  $M'$  soit le symétrique de  $M$  par rapport à  $O$ .
5. Déterminer et représenter l'ensemble  $E$  des points  $M$ , tels que le module de  $z'$  soit égal à 1.  
(On pourra remarquer que  $z' = \frac{i(z - z_B)}{z - z_A}$ .)

**EXERCICE 2****5 points****Enseignement de spécialité****Partie I**Soit  $x$  un nombre réel.

1. Montrer que  $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$ .
2. En déduire que  $x^4 + 4$  peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.

**Partie II**Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.On considère les entiers  $A = n^2 - 2n + 2$  et  $B = n^2 + 2n + 2$  et  $d$  leur PGCD.

1. Montrer que  $n^4 + 4$  n'est pas premier.
2. Montrer que, tout diviseur de  $A$  qui divise  $n$ , divise 2.
3. Montrer que, tout diviseur commun de  $A$  et  $B$ , divise  $4n$ .
4. Dans cette question on suppose que  $n$  est impair.
  - a. Montrer que  $A$  et  $B$  sont impairs. En déduire que  $d$  est impair.
  - b. Montrer que  $d$  divise  $n$ .
  - c. En déduire que  $d$  divise 2, puis que  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux.
5. On suppose maintenant que  $n$  est pair.
  - a. Montrer que 4 ne divise pas  $n^2 - 2n + 2$ .
  - b. Montrer que  $d$  est de la forme  $d = 2p$ , où  $p$  est impair.
  - c. Montrer que  $p$  divise  $n$ . En déduire que  $d = 2$ . (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4)

**PROBLÈME****5 points**On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x - (x^2 + 4x + 3)e^{-x}.$$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ; l'unité graphique est 2 cm.**Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire  $g$**

Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x} + 1.$$

1. Étudier les limites de  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
2. Calculer  $g'(x)$  et montrer que  $g'(x)$  et  $(3 - x^2)$  ont le même signe.
3. En déduire le tableau de variations de  $g$ .
4. **a.** Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet deux solutions dans  $\mathbb{R}$ . Vérifier que  $g(0) = 0$ . On note  $\alpha$  la solution non nulle.  
**b.** Prouver que  $-2,4 < \alpha < -2,3$ .
5. En déduire le signe  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

### Partie B - Étude de la fonction $f$

1. Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
2. **a.** Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = g(x)$ .  
**b.** Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
3. Démontrer que la droite (D) d'équation  $y = x$ , est asymptote à la courbe ( $\mathcal{C}$ ).
4. **a.** Montrer que la droite (D) et la courbe ( $\mathcal{C}$ ) se coupent en deux points A et B dont on donnera les coordonnées.  
**b.** Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe ( $\mathcal{C}$ ).
5. Construire la courbe ( $\mathcal{C}$ ) et la droite (D).

### Partie C - Calculs d'aire

1. Soit  $H$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}.$$

Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que la fonction  $H$  soit une primitive de la fonction  $h$  définie par :

$$h(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-x}.$$

2. Déterminer l'aire, en unités d'aire, de la partie de plan limitée par la courbe ( $\mathcal{C}$ ) et la droite (D).
3. Soit  $m$  un réel strictement supérieur à  $-1$ . On considère le domaine ( $\mathcal{D}_m$ ) délimité par la courbe ( $\mathcal{C}$ ), la droite (D) et les droites d'équations respectives  $x = -1$  et  $x = m$ .  
**a.** Calculer l'aire ( $\mathcal{A}_m$ ) du domaine ( $\mathcal{D}_m$ ), en unités d'aire.  
**b.** Déterminer la limite de ( $\mathcal{A}_m$ ) lorsque  $m$  tend vers  $+\infty$ .