**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat C Nouvelle-Calédonie novembre 1994

**EXERCICE 1** **points**

On se propose de calculer l'intégrale :

$$J = \int_0^1 \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^3}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer les deux intégrales :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \\ B &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

2. Déterminer trois nombres réels $a$, $b$ et $c$ tels que pour tout nombre réel $t$ positif ou nul on ait :

$$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2} \qquad (1)$$

3. En posant $t = \mathrm{e}^x$ dans l'égalité (1), calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

4. **a.** À l'aide d'une intégration par parties exprimer $J$ en fonction de $I$.

   **b.** En déduire la valeur de $J$. À l'aide de la calculatrice donner une valeur approchée de $J$ à $10^{-2}$ près.

**EXERCICE 2** **points**

1. Calculer les racines complexes $z_1$ et $z_2$ de l'équation :

$$z^2 - \frac{1}{5}z + \frac{1}{10} = 0.$$

   $z_1$ désignant la racine de partie imaginaire positive.

2. Soit $\theta$ le nombre réel de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\theta = 3$.

   Montrer que $z_1$ et $z_2$ sont égaux respectivement à $\dfrac{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}{10\cos\theta}$ et $\dfrac{\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}{10\cos\theta}$.

3. On pose, pour tout entier naturel $n$,

$$v_n = z_1^n + z_2^n.$$

   Montrer que $v_n$ est un nombre réel que l'on calculera en fonction de $n$ et $\theta$.

4. Montrer que $10\cos\theta = \sqrt{10}$. Majorer $|v_n|$, puis en déduire que la suite $(v_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

**EXERCICE 3** **points**

On donne sur un cercle quatre points distincts A, B, C, D (C et D n'étant pas diamétralement opposés).
Le cercle de centre D passant par A recoupe la droite (CA) en A$'$. Le cercle de centre D passant par B recoupe la droite (CB) en B$'$.
Le but de l'exercice est de prouver qu'il existe une rotation transformant A en A$'$ et B en B$'$ et de déterminer ses éléments caractéristiques.

**1.** On note H et K les projetés orthogonaux de D sur (CA) et (CB). Comparer les angles $\left(\overrightarrow{\text{DA}}, \overrightarrow{\text{DA}}'\right)$ et $\left(\overrightarrow{\text{DA}}, \overrightarrow{\text{DH}}\right)$.

Établir une propriété analogue pour $\left(\overrightarrow{\text{DB}}, \overrightarrow{\text{DB}}'\right)$.

**2.** Montrer que : $\left(\overrightarrow{\text{DA}}, \overrightarrow{\text{DH}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) + \dfrac{\pi}{2}$ (modulo $\pi$) et :
$\left(\overrightarrow{\text{DB}}, \overrightarrow{\text{DK}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{BD}}, \overrightarrow{\text{DC}}\right) + \dfrac{\pi}{2}$ (modulo $\pi$).

**3.** Qu'en déduit-on pour $\left(\overrightarrow{\text{DA}}, \overrightarrow{\text{DA}'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\text{DB}}, \overrightarrow{\text{DB}'}\right)$ ?

On note $\theta$ une mesure de $\left(\overrightarrow{\text{DA}}, \overrightarrow{\text{DH}}\right)$ modulo $2\pi$.

Conclure.

**PROBLÈME** **points**

Le but du problème est de résoudre une équation différentielle et d'étudier, sur $[0~;~+\infty[$, une solution particulière de cette équation.

**Partie A**

**1.** Résoudre l'équation différentielle $(E_1)$ $y'' + 4y' + 4y = 0$.

**2.** On considère l'équation différentielle $(E_2)$ $y'' + 4y' + 4y = 4x - 16$.

   **a.** Montrer que la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - 5$ est solution de $(E_2)$.

   **b.** Montrer qu'une fonction $f$ est solution de $(E_2)$ si et seulement si $f - g$ est solution de $(E_1)$.
   Déduire de 1. et de 2. b. l'ensemble des solutions de $(E_2)$.
   Déterminer la fonction $f$ solution de $(E_2)$ qui vérifie :

$$f(0) = -2 \quad \text{et} \quad f'(0) = -3.$$

**Partie B**

On considère la fonction $f$ définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = (2x+3)\text{e}^{-2x} + x - 5.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité 1 cm).

**1.** Déterminer la fonction $f'$ dérivée de la fonction $f$, puis la fonction $f''$ dérivée de $f'$.

**2.** Étude de $f'$.

   **a.** Montrer que pour tout $x$ de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $f''(x)$ est strictement positif.

**b.** Montrer que la limite de $xe-2x$ en $+\infty$ est 0. En déduire la limite de $f'(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

Donner le tableau de variation de $f'$ sur $[0~;~+\infty[$.

**c.** Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique sur $[0~;~+\infty[$. On la note $\alpha$.

Justifier que $1 \leqslant \alpha \leqslant 1,1$ à l'aide de la calculatrice.

**d.** En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0~;~+\infty[$.

**3.** Étude de $f$

**a.** Dresser le tableau de variation de $f$.

Quelles sont les valeurs décimales approchées par défaut de $f(1)$ et $f(1,1)$ données par la calculatrice ?

**b.** Tracer la droite $\Delta$ d'équation $y = x - 5$ et $\mathscr{C}$.

**Partie C**

Soit $F$ la primitive qui s'annule en zéro de la fonction $f$ définie dans la partie B.
On se propose de calculer $F$ par deux méthodes différentes.

**1.** Montrer que pour tout $x$ de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, on a :

$$f'(x) + 4f(x) + 4F(x) = 2x^2 - 16x - 11.$$

En déduire une expression de $F(x)$.

**2.** Calculer $F(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.