∽ Baccalauréat S Nouvelle–Calédonie mars 2009 ∾

EXERCICE 1 **4 points**
Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm. On considère les points A et B d' affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = 3+4i$.
Soit C et D les points d'affixes respectives $z_C = 2\sqrt{3} + i(-2-\sqrt{3})$ et
$z_D = -2\sqrt{3} + i(-2+\sqrt{3})$.
L' objet de l'exercice est de proposer une construction géométrique des points D et C.

1. **a.** Montrer que l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ est le point D.
   b. En déduire que les points B et D sont sur un cercle $\mathscr{C}$ de centre A dont on déterminera le rayon.
2. Soit F, l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{3}{2}$.
   a. Montrer que l'affixe z_F du point F est $-2i$.
   b. Montrer que le point F est le milieu du segment [CD].
   c. Montrer que $\dfrac{z_C - z_F}{z_A - z_F} = -i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle de $\dfrac{z_C - z_F}{z_A - z_F}$.
   Déduire des questions précédentes que la droite (AF) est la médiatrice du segment [CD].
3. Proposer un programme de construction pour les points D et C à partir des points A, B et F et réaliser la figure.
   Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère les points :

$$A(4~;~0~;~0),\quad B(0~;~2~;~0),\quad C(0~;~0~;~3)\quad \text{et } E\left(\frac{2}{3}~;~-\frac{2}{3}~;~\frac{1}{9}\right)$$

On se propose de déterminer de deux façons la distance δ_E du point E au plan (ABC).

RAPPEL : Soit $(\mathscr{P})$ un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ où a, b, c et d sont des nombre réels avec, a, b et c non tous nuls et M un point de coordonnées $\left(x_M~;~y_M~;~z_M\right)$ la distance δ_M du point M au plan $(\mathscr{P})$ est égale à :

$$\frac{\left|ax_M + by_M + cz_M + d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

1. **a.** Montrer que les points A, B et C déterminent bien un plan.
   b. Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(3;6;4)$.
   Montrer que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   c. Montrer qu'une équation du plan (ABC) est : $3x+6y+4z-12=0$.
   d. Déduire des questions précédentes la distance δ_E.

2. **a.** Montrer que la droite $(\mathcal{D})$ de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+t \\ y & = & 2t \\ z & = & \frac{5}{9}+\frac{4}{3}t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R},$$

est perpendiculaire au plan (ABC) et passe par le point E.

b. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal G du point E sur le plan (ABC).

c. Retrouver à partir des coordonnées des points E et G la distance δ_{E}.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Dans un stand de tir, un tireur effectue des tirs successifs pour atteindre plusieurs cibles.
La probabilité que la première cible soit atteinte est $\frac{1}{2}$.
Lorsqu'une cible est atteinte, la probabilité que la suivante le soit est $\frac{3}{4}$.
Lorsqu'une cible n'est pas atteinte, la probabilité que la suivante soit atteinte est $\frac{1}{2}$.
On note, pour tout entier naturel n non nul :

- A_n l'évènement : « la n-ième cible est atteinte ».
- $\overline{A_n}$ l'évènement : « la n-ième cible n'est pas atteinte ».
- a_n la probabilité de l'évènement A_n
- b_n la probabilité de l'évènement $\overline{A_n}$.

1. Donner a_1 et b_1.
Calculer a_2 et b_2. On pourra utiliser un arbre pondéré.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$: $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n$,
puis : $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}$
3. Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul, par $U_n = a_n - \frac{2}{3}$.

a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique.
On précisera la raison et le premier terme U_1.

b. En déduire l'expression de U_n en fonction de n, puis l'expression de a_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (a_n).

d. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $a_n \geqslant 0{,}6665$.

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par

$$f(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. **a.** Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2~;~5]$.

2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_{-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n \geqslant 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

3. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels a et b :

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = (-2-b)\mathrm{e}^{-b} + (2+a)\mathrm{e}^{-a}.$$

b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

c. Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

d. Donner une interprétation graphique de cette limite.

4. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\displaystyle\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}$.
Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?