Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 2002

Exercice 1 5 points

Un jeu consiste à tirer simultanément trois boules d'une urne contenant six boules blanches et quatre boules rouges.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
Si les trois boules tirées sont rouges, le joueur gagne 100 € ; si exactement deux boules tirées sont rouges, il gagne 15 € et si une seule est rouge il gagne 4 €. Dans tous les autre cas, il ne gagne rien.
Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le gain en euros du joueur lors d'un jeu.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
2. Pour un jeu, la mise est de 10 €. Le jeu est-il favorable au joueur, c'est-à-dire l'espérance mathématiques est-elle strictement supérieure à 10 ?
3. Pour l'organisateur, le jeu ne s'avérant pas suffisamment rentable, celui-ci envisage deux solutions :
   — soit augmenter la mise de 1 €, donc passer à 11 €,
   — soit diminuer chaque gain de 1 €, c'est-à-dire ne gagner que 99 €, 14 € ou 3 €.

   Quelle est la solution la plus rentable pour l'organisateur ?

Exercice 2 5 points
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. On considère le polynôme P de la variable complexe z, défini par :
$$P(z) = z^3 + \left(14 - \text{i}\sqrt{2}\right) z^2 + \left(74 - 14\text{i}\sqrt{2}\right) z - 74\text{i}\sqrt{2}.$$
   a. Déterminer le nombre réel y tel que iy soit solution de l'équation $P(z) = 0$.
   b. Trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait $P(z) = \left(z - \text{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$
   c. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 1 cm pour unité graphique.
   a. Placer les points A, B et I d'affixes respectives $z_\text{A} = -7 + 5\text{i}$; $z_\text{B} = -7 - 5\text{i}$ et $z_\text{I} = \text{i}\sqrt{2}$.
   b. Déterminer l'affixe de l'image du point I par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.
   c. Placer le point C d'affixe $z_\text{C} = 1 + \text{i}$. Déterminer l'affixe du point N tel que ABCN soit un parallélogramme.
   d. Placer le point D d'affixe $z_\text{D} = 1 + 11\text{i}$. Calculer $Z = \dfrac{z_\text{A} - z_\text{C}}{z_\text{D} - z_\text{B}}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. Justifier que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires et en déduire la nature du quadrilatère ABCD.

Exercice 2 5 points
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.
On pose $S = x + y$ et $P = xy$.

1. **a.** Démontrer que x et S sont premiers entre eux, de même que y et S.
   b. En déduire que $S = x + y$ et $P = xy$ sont premiers entre eux.
   c. Démontrer que les nombres S et P sont de parités différentes (l'un pair, l'autre impair).
2. Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.
3. Trouver les nombres premiers entre eux x et y tels que : $SP = 84$.
4. Déterminer les deux entiers naturels a et b vérifiant les conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a+b & = & 84 \\ ab & = & d^3 \end{array}\right. \quad \text{avec } d = \text{pgcd}(a\,;b)$$

(On pourra poser $a = dx$ et $b = dy$ avec x et y premiers entre eux)

Problème 10 points

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (Unités graphiques : 2 cm).

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (3+x)\text{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$, puis en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
3. Construire la courbe (Γ) représentative de f dans $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\text{I} = \displaystyle\int_{-3}^{0} x\text{e}^{-\frac{x}{2}}\,\text{d}x$ et en déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine défini par les couples $(x,\ y)$ tels que $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ et $x \leqslant 0$.
5. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$. Soit α la solution non nulle, montrer que : $-2 < \alpha < -\dfrac{3}{2}$.
   b. Plus généralement, déterminer **graphiquement** suivant les valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Partie B

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 3\text{e}^{\frac{x}{2}} - 3$.

1. Démontrer que $f(x) = 3$ si et seulement si $\varphi(x) = x$
2. Soit φ' et $\varphi''(x)$ les dérivées première et seconde de la fonction φ.
   a. Calculer, pour tout réel x, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$. Justifier que $\varphi'(\alpha) = \dfrac{\alpha+3}{2}$.
   b. Étudier le sens de variation de φ', puis celui de φ.
   On se place désormais dans l'intervalle $\text{I} = [-2\,;\,\alpha]$.
3. Montrer que, pour tout x appartenant I ;
   a. $\varphi(x)$ appartient à I.
   b. $\dfrac{1}{2} \leqslant \varphi'(x) \leqslant \dfrac{3}{4}$
   c. En déduire, à l'aide d'une intégration, que pour tout x de l'intervalle I, on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{2}(\alpha - x) \leqslant \varphi(\alpha) - \varphi(x) \leqslant \frac{3}{4}(\alpha - x).$$

4. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & -2 \\ u_{n+1} & = & \varphi(u_n) \end{array}\right.$$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, u_n appartient à l'intervalle I.

b. Justifier que, pour tout entier n,

$$0 \leqslant \alpha - u_{n+1} \leqslant \frac{3}{4}(\alpha - u_n) \qquad \text{puis que} \qquad 0 \leqslant \alpha - u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

d. Déterminer le plus petit entier p tel que : $\left(\frac{3}{4}\right)^p \leqslant 10^{-2}$.

Donner une approximation décimale 10^{-2} près de u_p, à l'aide d'une calculatrice, puis une valeur approchée de α à 2×10^{-2} près.