

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Nouvelle-Calédonie juin 1975 ∞

EXERCICE 1

1. Démontrer que si deux entiers naturels  $x$  et  $y$  sont premiers entre eux, alors  $2x + y$  et  $5x + 2y$  sont aussi premiers entre eux.
2. Résoudre dans  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  le système :

$$\begin{cases} (2a + b)(5a + 2b) = 1620 \\ ab = 3M \end{cases}$$

où  $M$  désigne le plus petit multiple commun de  $a$  et  $b$ .

EXERCICE 2

Dans un repère orthonormé, on définit la famille de courbes  $\mathcal{C}_m$  dépendant du paramètre réel  $m$ , par l'équation

$$(m + 1)x^2 - (m - 1)y^2 - 8 = 0$$

1. Discuter, suivant les valeurs de  $m$ , la nature de la courbe  $\mathcal{C}_m$ .
2. Tracer, sur un même graphique, les courbes
3.  $\mathcal{C}_{-1}$ ,  $\mathcal{C}_0$ ,  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_3$ .

PROBLÈME

Partie A

1. Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par

$$f(x) = x - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

- a. Vérifier que :

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^{2x} + 1} = x + 1 - \frac{2}{e^{-2x} + 1}.$$

- b. Étudier les variations de  $f$ .
  - c. Vérifier que les droites d'équations  $y = x - 1$  et  $y = x + 1$  sont asymptotes à la courbe représentative de  $f$ . Tracer cette courbe.
2. Soit  $x$  un nombre réel donné.

- a. Justifier l'existence du nombre  $\int_x^{x+1} f(t) dt$ ,  $f$  étant la fonction précédente.

Soit  $\hat{f}$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par :

$$\hat{f}(x) = \int_x^{x+1} \left( t - \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \right) dt.$$

Démontrer que  $\hat{f}$  est une application dérivable de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ , dont la fonction dérivée vérifie la relation :

$$\hat{f}'(x) = f(x + 1) - f(x).$$

b. En remarquant que l'on a, pour tout  $x$  réel

$$\frac{e^{x+1} + e^{-x-1}}{e^x + e^{-x}} = e \frac{1 + e^{-2x-2}}{1 + e^{-2x}} = e^{-1} \frac{e^{2x+2} + 1}{e^{2x} + 1}$$

trouver la limite de  $\hat{f}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ , vers  $-\infty$ . Donner alors le tableau de variation de  $\hat{f}$ .

c. Calculer  $\hat{f}\left(-\frac{1}{2}\right)$ . Pouvait-on prévoir le résultat?

Vérifier que la courbe représentative de la fonction  $\hat{f}$  admet pour asymptotes les droites d'équations

$$y = x - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y = x + \frac{3}{2}.$$

### Partie B

Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle, continues sur  $\mathbb{R}$  muni des lois de compositions suivantes

$$\begin{aligned} f + g &: x \longmapsto f(x) + g(x) \\ \lambda.f &: x \longmapsto \lambda f(x), \end{aligned}$$

où  $(f; g) \in \mathcal{C}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , est un espace vectoriel réel.

Soit  $E$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}$  engendré par les deux fonctions :

$$e_1 : x \longmapsto \cos \alpha x, \quad e_2 : x \longmapsto \sin \alpha x,$$

où  $\alpha$  est un réel non nul donné.

1. a. Vérifier que  $E$  est de dimension 2 et que  $(e_1, e_2)$  en est une base.
- b. Soit  $x$  un réel donné; justifier l'existence du nombre

$$\int_x^{x+1} f(t) dt$$

$f$  étant un élément de  $E$  dont les coordonnées sur la base  $(e_1, e_2)$  sont notées  $\lambda$  et  $\mu$ .  
Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par

$$f(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt.$$

Démontrer que  $f$  est un élément de  $E$ , et donner ses coordonnées dans la base  $(e_1, e_2)$ .

2. Soit  $\varphi$  l'application de  $E$  dans lui-même définie par :

$$\varphi(f) = \hat{f}.$$

- a. Démontrer que  $\varphi$  est une application linéaire. Déterminer sa matrice dans la base  $(e_1, e_2)$ .
- b. Pour quelles valeurs de  $\alpha$  cette application est-elle bijective?