Durée : 4 heures

Baccalauréat C Nouvelle-Calédonie novembre 1975

EXERCICE 1

1. Démontrer que si deux entiers naturels x et y sont premiers entre eux, alors $2x+y$ et $5x+2y$ sont aussi premiers entre eux.

2. Résoudre dans $\mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl}(2a+b)(5a+2b) & = & 1\,620\\ ab & = & 3M\end{array}\right.$$

où M désigne le plus petit multiple commun de a et b.

EXERCICE 2

Dans un repère orthonormé, on définit la famille de courbes $\mathscr{C}_m$ dépendant du paramètre réel m, par l'équation

$$(m+1)x^2-(m-1)y^2-8=0$$

1. Discuter, suivant les valeurs de m, la nature de la courbe $\mathscr{C}_m$.

2. Tracer, sur un même graphique, les courbes

3. $\mathscr{C}_{-1}$, $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_3$.

PROBLÈME

Partie A

1. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x)=x-\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$$

a. Vérifier que :

$$f(x)=x-1+\frac{2}{\mathrm{e}^{2x}+1}=x+1-\frac{2}{\mathrm{e}^{-2x}+1}.$$

b. Étudier les variations de f.

c. Vérifier que les droites d'équations $y=x-1$ et $y=x+1$ sont asymptotes à la courbe représentative de f. Tracer cette courbe.

2. Soit x un nombre réel donné.

a. Justifier l'existence du nombre $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$, f étant la fonction précédente.

Soit $\hat{f}$ la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\hat{f}(x) = \int_x^{x+1} \left(t - \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}\right)\mathrm{d}t.$$

Démontrer que $\hat{f}$ est une application dérivable de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, dont la fonction dérivée vérifie la relation :

$$\hat{f}'(x) = f(x+1) - f(x).$$

b. En remarquant que l'on a, pour tout x réel

$$\frac{\mathrm{e}^{x+1} + \mathrm{e}^{-x-1}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \mathrm{e}\frac{1 + \mathrm{e}^{-2x-2}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}} = \mathrm{e}^{-1}\frac{\mathrm{e}^{2x+2} + 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$$

trouver la limite de $\hat{f}$ lorsque x tend vers $+\infty$, vers $-\infty$. Donner alors le tableau de variation de $\hat{f}$.

c. Calculer $\hat{f}\left(-\frac{1}{2}\right)$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Vérifier que la courbe représentative de la fonction $\hat{f}$ admet pour asymptotes les droites d'équations

$$y = x - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y = x + \frac{3}{2}.$$

Partie B

Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle, continues sur $\mathbb{R}$ muni des lois de compositions suivantes

$$\begin{array}{lcccl} f+g & : & x & \longmapsto & f(x)+g(x) \\ \lambda.f & : & x & \longmapsto & \lambda f(x), \end{array}$$

où $(f\ ;\ g) \in \mathscr{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, est un espace vectoriel réel.
Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}$ engendré par les deux fonctions :

$$e_1 : x \longmapsto \cos\alpha x, \quad e_2 : x \longmapsto \sin\alpha x,$$

où α est un réel non nul donné.

1. **a.** Vérifier que E est de dimension 2 et que $(e_1,\ e_2)$ en est une base.

   b. Soit x un réel donné ; justifier l'existence du nombre

$$\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   f étant un élément de E dont les coordonnées sur la base $(e_1,\ e_2)$ sont notées λ et μ.

Soit $\hat{f}$ la fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$\hat{f}(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que $\hat{f}$ est un élément de E, et donner ses coordonnées dans la base $(e_1,\ e_2)$.

2. Soit φ l'application de E dans lui-même définie par :

$$\varphi(f) = \hat{f}.$$

a. Démontrer que φ est une application linéaire. Déterminer sa matrice dans la base $(e_1,\ e_2)$.

b. Pour quelles valeurs de α cette application est-elle bijective ?