

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Nouvelle-Calédonie novembre 1986 ∞

EXERCICE 1

4 points

Dans un plan orienté P rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, A et B sont les points d'affixes respectives 1 et $2i$.

Pour tout nombre complexe $z \neq 2i$, on pose :

$$f(z) = \frac{z-1}{z-2i}.$$

1. Lorsque M est un point d'affixe z , autre que A et B , exprimer l'argument de $f(z)$ à l'aide de l'angle orienté de vecteurs (\vec{MA}, \vec{MB}) .

Déterminer et tracer l'ensemble C_1 des points différents de A et B , et d'affixe z telle que $\frac{\pi}{2}$ soit une mesure en radians de l'argument de $f(z)$.

2. Soit C_2 l'ensemble des points différents de B et d'affixe z telle que $f(z)$ ait pour module 2 .
Montrer que C_2 est un cercle dont on précisera le centre et le rayon. Tracer C_2 .
3. Soit M_0 un point différent de B et d'affixe z_0 . Donner une condition nécessaire et suffisante sur $f(z_0)$ pour que M_0 soit commun à C_1 et C_2 . En déduire que C_1 et C_2 ont un unique point commun dont on précisera les coordonnées cartésiennes.

EXERCICE 2

5 points

f est l'application de $[0; +\infty[$ dans \mathbb{R} définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2+4} - \frac{x}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}.$$

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b et une fonction \mathcal{E} de $[0; +\infty[$ dans \mathbb{R} qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, tels que :

$$\sqrt{x^2+4} = ax + b + \mathcal{E}(x) \quad \text{pour } x \text{ positif ou nul.}$$

2. On note Γ la courbe représentative de f dans le plan P rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Montrer que Γ admet une droite asymptote d dont on précisera une équation.
Préciser la position de Γ par rapport à d .
3. Étudier les variations de f et tracer Γ en prenant l'unité de longueur égale à 2 cm.

PROBLÈME

11 points

Pour tout entier n , on note f_n l'application de $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ dans \mathbb{R} définie par :

$$\begin{cases} f_n(x) &= \frac{\sin[2(n+1)x]}{\sin x} & \text{pour } x \text{ appartenant à } \left]0; \frac{\pi}{2}\right] \\ f_n(0) &= 2n+2. \end{cases}$$

Le but du problème est d'établir la convergence de la suite u de terme général :

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$$

et de calculer sa limite.

Partie A

Préliminaires

1. Montrer que f_n est continue dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; en déduire que la suite u est bien définie dans \mathbb{N} .
2. Montrer que : $u_{n+1} - u_n = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$.
(On rappelle que $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$).
3. Calculer u_0 , u_1 et u_2 .

Partie B

Le but de cette partie est d'établir la convergence de u .

1. Montrer que :

$$u_n = 2 \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

2. Calculer $\int_0^1 dx$, et $\int_0^1 x^{2k} dx$, k étant un entier naturel non nul.
En déduire que : $u_n = 2 \int_0^1 \frac{1 + (-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2} dx$.
3. Etablir $\left| u_n - 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \right| \leq \frac{2}{2n+3}$.
4. En déduire la convergence de la suite u .

Partie C

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

Soit φ l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Soit F la primitive nulle en zéro de φ ; soit G l'application de $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ dans \mathbb{R} définie par : $G(v) = F(\tan v)$.

1. Montrer que G est dérivable et admet une fonction dérivée G' très simple que l'on précisera.
2. En déduire G .
3. En déduire la valeur de J . Quelle est la limite de la suite u ?