Durée : 4 heures

Baccalauréat C Nouvelle Calédonie novembre 1993

EXERCICE 1 **5 points**

On se propose de calculer l'intégrale :

$$J = \int_0^1 \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^3}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer les deux intégrales :

$$A = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$$

$$B = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

2. Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre réel t positif ou nul on ait :

$$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2} \qquad (1).$$

3. En posant $t = \mathrm{e}^x$ dans l'égalité (1), calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

4. **a.** À l'aide d'une intégration par parties exprimer J en fonction de I.

b. En déduire la valeur de I. À l'aide de la calculatrice donner une valeur approchée de J à 10^{-2} près.

EXERCICE 2 **4 points**

On considère, dans le plan orienté rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$, la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation

$$xy - 2x - 3y - 1 = 0,$$

et la transformation f du plan, qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{1-\mathrm{i}}{2}z - 2 + 2\mathrm{i}.$$

1. Montrer que f admet un point invariant unique que l'on déterminera.
Reconnaître la nature de la transformation f et donner ses éléments caractéristiques.

2. Exprimer les coordonnées $(x\,;\,y)$ de M en fonction des coordonnées $\left(x'\,;\,y'\right)$ de M'.
3. Montrer que l'image de la courbe $(\mathcal{C})$ par la transformation f est la courbe $(\mathcal{C}')$ d'équation

$$x'^2 - y'^2 - x' + 3y' - 9 = 0.$$

4. Montrer que la courbe $(\mathcal{C}')$ est une hyperbole dont on donnera, dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, les coordonnées du centre et des sommets. Représenter $(\mathcal{C}')$ dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

PROBLÈME **11 points**

Le but de ce problème est l'étude d'une fonction et le calcul ou l'encadrement de quelques nombres qui lui sont attachés.

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{8}\ln x - x\ln x.$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ en prenant 2 cm comme unité graphique.

Partie A

Étude du signe de la dérivée de f

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Prouver que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique.
   On note α cette solution.
   Justifier que $1 \leqslant \alpha \leqslant 1,2$.
3. Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

Étude et représentation graphique de la fonction f

1. Calculer les limites de f en zéro et en $+\infty$. Donner le tableau des variations de f.
2. Prouver que :

$$0 \leqslant f(\alpha) - f(1) \leqslant f'(1).(\alpha - 1) \leqslant 0,2.f'(1).$$

   En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$.

Partie C

Approximation de α

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{8x}}.$$

1. Prouver que $g(\alpha) = \alpha$.

Déduire du sens de variation de g que pour tout élément x de l'intervalle $[1\,;\,1{,}2]$, $g(x)$ appartient encore à cet intervalle.

2. Soit (u_n) la suite d'éléments de $[1\,;\,1{,}2]$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = g\left(u_n\right) \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

a. Prouver que pour tout entier naturel n, on a :

$$\left|u_{n+1} - \alpha\right| \leqslant 0,15\left|u_n - \alpha\right|.$$

b. Démontrer que la suite (u_n) converge vers α.

c. Établir que :

$$\left|u_6 - \alpha\right| \leqslant 10^{-5}.$$

Calculer u_6 à l'aide de la calculatrice (on donnera la partie entière et les cinq premières décimales).