

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Nouvelle-Calédonie décembre 1991 ∞

EXERCICE 1

5 points

ABC est un triangle équilatéral de côté a . On note A' le milieu du segment BC et O le centre du triangle.

1.
 - a. Déterminer l'ensemble \mathcal{E} des réels m tels que les points A, B, C affectés des coefficients respectifs $m, 1, 1$ admettent un barycentre.
 - b. Quel est l'ensemble des barycentres obtenus lorsque m parcourt \mathcal{E} ?
2. Dans cette question on choisit $m = 2$.
 - a. Déterminer le barycentre G des points A, B, C affectés des coefficients respectifs 2, 1, 1. Placer sur une figure les points A, B, C, O, A' , G.
 - b. Déterminer et construire l'ensemble \mathcal{F} des points M tels que :

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$$

3. Dans cette question on choisit $m = -2$. Soit \mathcal{D} l'ensemble des points M tels que :

$$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0.$$

- a. Préciser la nature de \mathcal{D} et de son intersection avec la droite (AA') .
- b. Tracer \mathcal{D} sur la figure précédente.

EXERCICE 2

4 points

On considère le mot SUITE, On forme des « mots » (ayant un sens ou non), de une à cinq lettres, à partir des lettres du mot SUITE, Chaque lettre intervient au plus une fois dans un même « mot ».

1. Combien de « mots » peut-on former?
2. Combien de « mots » de cinq lettres peut-on former?
3. Déterminer le nombre de « mots » de cinq lettres dans lesquels il n'y a pas deux voyelles consécutives,

PROBLÈME

11 points

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{2x} (e^x - 2)^2.$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

Partie A

L'objet de cette partie est d'étudier la fonction f .

1.
 - a. Préciser $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 - b. Démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à \mathcal{C} .

2. On désigne par f' la fonction dérivée de f .
- a. Démontrer que, pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = 4e^{2x}(e^x - 1)(e^x - 2).$$

- b. Étudier les variations de f et dresser le tableau de variations de f .
3. En prenant comme unité graphique 4 cm et en plaçant l'origine O du repère au centre de la feuille, tracer la courbe \mathcal{C} sur une feuille de papier millimétré.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier la position relative de deux courbes.
Soit F la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par :

$$F(x) = \int_{\ln 2}^x f(t) dt.$$

1. Étudier le sens de variation de F .
2. Calculer $F(x)$ et vérifier que $F(x)$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$F(x) = \frac{1}{12}(e^x - 2)^2(3e^{2x} - 4e^x - 4).$$

3. Soit Γ la courbe représentative de la fonction F .
Étudier la position de Γ par rapport à la courbe \mathcal{C} .
4. a. Démontrer que Γ admet une asymptote, parallèle à l'axe des abscisses, dont on donnera une équation.
- b. Tracer Γ sur la même figure que \mathcal{C} .