∽ Baccalauréat C novembre 1989 ∽
Nouvelle-Calédonie

EXERCICE 1 **4 points**

On considère l'équation différentielle :

$$y'' + \alpha y = 0 \qquad \text{(E)}$$

dans laquelle α est un paramètre réel.

1. On suppose ici $\alpha < 0$.
   Écrire la solution générale de l'équation (E).
   Montrer que l'équation n'admet qu'une solution f nulle simultanément aux points 0 et π.
2. Même question en supposant $\alpha = 0$.
3. On suppose désormais $\alpha > 0$.
   En posant $\alpha = \omega^2$, écrire la solution générale de l'équation (E). À quelle condition sur ω l'équation (E) admet-elle une solution g vérifiant simultanément les conditions suivantes :
   a. g n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{R}$;
   b. $g(0) = g(\pi) = 0$?

EXERCICE 2 **4 points**

Dans le plan on considère deux droites D, D′ distinctes et parallèles, et un point A n'appartenant ni à D, ni à D′.

1. Construire à l'aide d'une transformation géométrique simple un triangle équilatéral PAP′ tel que P soit sur D et P′ sur D′.
   Préciser le nombre de triangles répondant à la question.
2. Déterminer un carré admettant pour sommets A (point considéré ci-dessus), un point Q de D, un point Q′ de D′et tel que [AQ′] soit une diagonale de ce carré.
   Préciser le nombre de carrés répondant à la question.

PROBLÈME **12 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

1. Construire la courbe représentative $(\mathscr{C}')$ de la dérivée f', de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé : $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
   Montrer que $f'(x) \geqslant -\dfrac{1}{4}$ pour tout x réel.
2. Montrer que l'équation $f'(x) = 1$ admet une solution unique :

$$c = 2\ln\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

   Calculer $f(c)$.

3. Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

Déterminer le signe de $g(c)$ et montrer que la restriction de g à chacun des deux intervalles $]-\infty\ ;\ c]$ et $[c\ ;\ +\infty[$ est strictement monotone.

En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions a et b avec $a < 0 < c < b$.

4. Tracer sur un graphique différent du précédent la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de f.

5. Soit x_0 tel que $x_0 \leqslant c$, et soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$.
Montrer que l'on a $x_n \leqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

6. Sous les hypothèses de la question précédente, montrer que l'on a :

$$|x_{n+1} - a| \leqslant \frac{1}{4}|x_n - a| \quad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

7. En déduire que la suite (x_n) converge vers a.