∾ Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie décembre 1997 ∾

Exercice 1 **5 points**

Dans cet exercice les résultats pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice. Le tableau suivant donne l'évolution de 1955 à 1995 de l'espérance de vie des hommes et des femmes en France.

Année i	1955	1965	1975	1985	1995
Rang x_i de l'année i	0	10	20	30	40
Espérance de vie des hommes h_i	65	67,5	69	71,3	73
Espérance de vie des femmes f_i	71,2	74,4	76,9	79,4	82

1. Représenter les deux nuages de points associés aux séries statistiques $(x_i,\ h_i)$ et $\left(x_i,\ f_i\right)$, dans le plan rapporté à un repère orthogonal. Unités graphiques : sur l'axe des abscisses 0,25 cm ; sur l'axe des ordonnées 1 cm ; de plus, sur l'axe des ordonnées, on placera 65 à l'origine.
2. **a.** Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et h (on donnera la valeur décimale arrondie à 10^{-3} près).

   b. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite (D) de régression de h en x (pour les coefficients, on donnera les valeurs décimales arrondies à 10^{-2} près).

   c. Tracer (D) dans le repère précédent.
3. **a.** Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et f (on donnera la valeur décimale arrondie à 10^{-3} près).

   b. Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite (D$'$) de régression de f en x (pour les coefficients, on donnera les valeurs décimales arrondies à 10^{-2} près).

   c. Tracer (D$'$) dans le repère précédent.
4. En supposant que les évolutions correspondent durant les années à venir aux équations des droites précédentes, déterminer par le calcul :

   a. quelle serait l'espérance de vie des hommes et des femmes en l'an 2000 ?

   b. en quelle année l'espérance de vie des femmes deviendrait supérieure de 10 ans à celle des hommes ?

Exercice 2 5 points
Enseignement obligatoire

Dans un sac se trouvent 6 jetons numérotés de 1 à 6. Un jeu consiste à tirer au hasard l'un des jetons.
Si le numéro obtenu est un multiple de 2, le joueur gagne 1 franc ;
s'il obtient « 1 »ou « 3 », il gagne 2 francs ;
s'il obtient « 5 »il garde le jeton tiré et il tire un second jeton parmi les cinq restants ;
si le second numéro obtenu est un multiple de 2, il gagne 2 francs ; si le second numéro obtenu est « 1 », il gagne 9 francs ;
et si le second numéro est « 3 », il gagne k francs, où k est un nombre réel.
Pour jouer à ce jeu, le joueur achète au préalable un ticket à 3 francs. On suppose à chaque fois que les tirages sont équiprobables.
Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur la différence entre le gain et le prix du ticket.

1. À l'aide d'un arbre, représenter les différentes issues possibles.
2. **a.** À l'aide de la question précédente, donner les valeurs x_i, que peut prendre la variable aléatoire X ; donner ensuite la loi de probabilité de X.

   b. Montrer que l'espérance mathématique de X est égale à $\dfrac{k-40}{30}$.

   c. Déterminer k pour que l'organisateur du jeu gagne 0,10 franc en moyenne par ticket vendu.

3. Dans cette question, on prend $k = 32$.

   a. Un joueur joue une fois à ce jeu. Montrer que $P(X \geqslant 0) = \dfrac{1}{15}$.

   b. Ce joueur joue maintenant 3 parties indépendantes. Calculer la probabilité d'avoir un gain aux deux premières parties et une perte à la troisième (donner la valeur arrondie de cette probabilité à 10^{-3} près).

Exercice 2 **5 points**
Enseignement de spécialité

Dans un rayon d'un magasin ouvert dix heures par jour, on peut trouver soit un vendeur A pendant six heures de temps, soit pendant son absence, un vendeur B pendant trois heures de temps, soit en l'absence de A et B, aucun vendeur pendant une heure de temps. Les plages horaire de présence varient, si bien que le fait qu'un client soit conseillé par A, par B ou ne soit pas conseillé est aléatoire. Quand ils sont conseillés par A, 70 % des clients effectuent un achat, 50 % l'effectuent quand ils sont conseillés par B et 20 % seulement quand personne n'est là pour les conseiller.
Pour un client qui se présente dans ce rayon, on considère les évènements suivants :
A : « Le client est conseillé par A.
B : « Le client est conseillé par B.
C : « Le client n'est conseillé par personne.
H : « Le client effectue un achat.

1. Traduire, en terme de probabilités conditionnelles, les données numériques de l'énoncé à l'aide des évènements A, B, C et H.

   a. Un client se présente dans le rayon. Quelle est la probabilité que le client soit conseillé par A et qu'il effectue un achat ?

   b. Quelle est la probabilité que le client effectue un achat ?

   c. Le client effectue un achat. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas été conseillé par A ?

2. Pendant n jours, n clients viennent dans ce rayon indépendamment les uns des autres, à raison de un client par jour.

   a. On prend $n = 7$. Quelle est la probabilité qu'au moins cinq des clients aient été conseillés par A ?

   b. Maintenant, n est quelconque.
   Montrer que la probabilité qu'au moins un des clients ait été conseillé par A est égale à $1-(0,4)^n$.
   Calculer n pour que cette probabilité soit au moins égale à 0,99.

Problème **10 points**
Partie I

On considère les fonctions numériques f et g, définies sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(t) = 13t^2 + 50t \quad ; \quad g(t) = 2000\mathrm{e}^{-0,116t}.$$

On note $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ leurs courbes représentatives respectives dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
Unités graphiques : axe des abscisses 0,5 cm pour une unité ; axe des ordonnées 0,5 cm pour 100 unités.

1. **a.** étudier le sens de variation de la fonction f.

   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. **a.** étudier le sens de variation de la fonction g.

b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$. En déduire une droite asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_2)$; quelle est la position de $(\mathscr{C}_2)$ par rapport à cette asymptote ?

3. Tracer, dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ les courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$.

Partie II

Une usine, fabriquant uniquement un produit B, décide la fabrication d'un produit A. Les nombres $f(t)$ et $g(t)$, définis à la partie I, représentent les quantités respectives de produit A et de produit B fabriquées par jour, où t est la durée, exprimée en mois, écoulée depuis le lancement de A.

1. On considère la fonction h, définie sur $[0~;~+\infty[$ par : $h(t) = f(t) - g(t)$.

a. étudier le sens de variation de la fonction h.

b. Montrer que l'équation $h(t) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[6~;~7]$.

c. En déduire combien de mois après son lancement la fabrication de A dépasse celle de B.

2. On considère la fonction q, définie sur $[0~;~+\infty[$ par : $q(t) = f(t) + g(t)$.

a. Que représente $q(t)$?

b. Donner une primitive Q de q.

c. Calculer la valeur moyenne de la fonction q sur l'intervalle $[0~;~10]$, c'est-à-dire le nombre $N = \dfrac{1}{10}\displaystyle\int_1^{10} q(t)\,\text{d}t$.
Après avoir calculé la valeur exacte de N, on en donnera une valeur approchée à 1 unité près.

3. L'usine ne peut pas fabriquer une quantité journalière de produit A supérieure à 3 000. Par lecture graphique, déterminer au bout de combien de mois ce rythme est atteint.