Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie décembre 2001

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous donne la dépense de consommation finale des ménages français en biens d'équipement pour les années 1993 à 1998.

Année	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Dépense y_i en milliards de francs	34,6	35,8	18,8	40,5	41,5	46,1

(Source INSEE, Comptes Nationaux)

Le détail des calculs statistiques, à effectuer à la machine, n'est pas demandé.

1. **a.** Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points $M_i\left(x_i~;~y_i\right)$ en prenant comme unités graphiques : 2 cm pour 1 rang en abscisses et 1 cm pour 1 milliard de francs en ordonnées, en faisant débuter la graduation à 30 sur l'axe des ordonnées.

   b. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et placer ce point sur le graphique.

   On veut réaliser un ajustement affine de ce nuage de points afin d'obtenir une prévision pour l'année 1999 de la dépense des ménages français en biens d'équipement.

2. Dans cette question on utilise la méthode d'ajustement dite de la droite de Mayer.

   a. On désigne par G_1 le point moyen des trois premiers points (M_1, M_2 et M_3) du nuage et par G_2 le point moyen des trois derniers points (M_4, M_5 et M_6) du nuage.

   Calculer les coordonnées de G_1 et G_2 puis placer ces deux points sur le graphique.

   b. Démontrer que l'équation réduite de la droite (G_1G_2) est $y = 2,1x + 32,2$.

   Tracer (G_1G_2) sur le graphique.

   c. Calculer la prévision pour l'année 1999 de la dépense des ménages français en biens d'équipement obtenue en utilisant la droite (G_1G_2).

3. Dans cette question, on utilise la méthode des moindres carrés.

   a. Soit D la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés; elle a pour équation réduite $y = 2,18x + b$.

   Justifier que $b = 31,92$ en utilisant le point moyen G.

   Tracer D sur le graphique.

   b. Calculer la prévision pour l'année 1999 de la dépense des ménages français en biens d'équipement obtenue en utilisant la droite D.

4. Le montant réel de la dépense pour l'année 1999 a été de 48,8 milliards de francs.

   Commenter, au vu de cette donnée, les prévisions obtenues par les deux méthodes d'ajustement envisagées précédemment.

EXERCICE 2 **6 points**

Enseignement obligatoire

Une entreprise fabrique un article qui doit répondre à des normes précises. On considère que 8 % des articles produits ne sont pas conformes aux normes. Un test de contrôle en fin de fabrication est censé repérer les articles non conformes. Cependant le test comporte une certaine marge d'erreur; une étude a établi que

- 5 % des articles conformes aux normes sont refusés par le test;
- 10 % des articles non conformes aux normes sont acceptés par le test.

On considère un article pris au hasard au moment de passer le test.

On note :

C l'évènement « l'article est conforme aux normes » ;
T l'évènement « l'article est accepté par le test ».
$\overline{C}$ et $\overline{T}$ désignent les évènements contraires respectifs de C et T.
La probabilité d'un évènement E est notée $p(E)$; la probabilité conditionnelle de E sachant que F est réalisé est notée $p_F(E)$.

1. **a.** Déduire des données les probabilités $p(C)$, $p\left(\overline{C}\right)$, $p_C(T)$, $p_{\overline{C}}(T)$, $p_C\left(\overline{T}\right)$ et $p_{\overline{C}}\left(\overline{C}\right)$ (on pourra faire un arbre).
   b. Calculer $p(T \cap C)$ et $p\left(T \cap \overline{C}\right)$. En déduire que $p(T) = 0,882$.
   c. Quelle est la probabilité que le contrôle donne un résultat erroné ?
2. Le coût de fabrication d'un article est 80 F.
   Tout article refusé par le test est détruit.
   Chaque article accepté par le test est mis sur le marché et vendu 120 F mais lorsqu'un tel article n'est pas conforme aux normes, l'entreprise doit rembourser 140 F au client (prix d'achat plus 20 F de frais de port) et l'article litigieux est détruit.
   Soit X le nombre indiquant le bénéfice ou la perte correspondant à un article choisi au hasard. L'ensemble des valeurs de X est : $\{+40\ ;\ -80\ ;\ -100\}$.
   a. Exprimer les évènements $(X = 40)$, $(X = 80)$ et $(X = -100)$ en utilisant C, $\overline{C}$, T et $\overline{T}$.
   b. Donner la loi de probabilité associée à ces trois valeurs.
   c. Calculer l'espérance de cette loi. Quelle interprétation peut-on en donner ?

EXERCICE 2 **6 points**
Enseignement de spécialité

Dans un certain milieu professionnel M, toute personne est tenue de posséder un agenda et de le renouveler chaque année. On supposera qu'aucune personne n'achète plus d'un agenda.
Deux fournisseurs, désignés respectivement par a et b, se partagent le marché des agendas dans le milieu M (donc tout individu faisant partie de M se fournit soit auprès de a, soit auprès de b).
On cherche à prévoir les parts de marché futures de a et b en faisant l'hypothèse que d'une année sur l'autre :

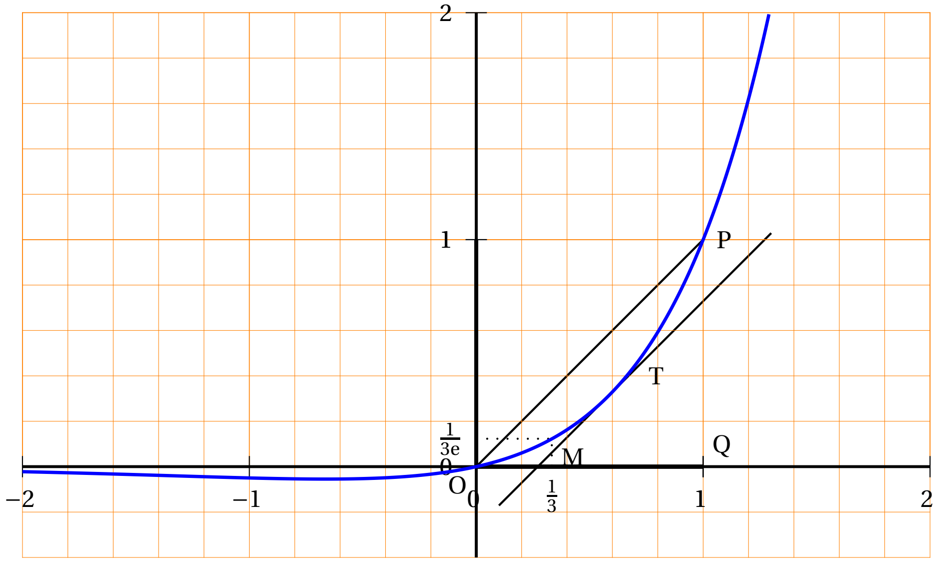
- 76 % des clients de a restent fidèles à a ;
- 64 % des clients de b restent fidèles à b.

Pour l'année 2000, 40 % des individus faisant partie de M ont choisi a et les autres ont choisi b.
On considère une personne prise au hasard dans M.
On note, pour tout entier naturel n :
A_n l'évènement « l'année $2000 + n$, la personne choisit a ».
B_n l'évènement « l'année $2000 + n$, la personne choisit b ».

1. **a.** Déduire des données les probabilités $p(A_0)$, $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{B_n}(A_{n+1})$.
   b. Démontrer la relation $p(A_{n+1}) = 0,76 \times p(A_n) + 0,36 \times p(B_n)$.
   c. On pose, pour tout entier naturel n, $p_n = p(A_n)$. Justifier la relation $p_{n+1} = 0,4p_n + 0,36$.
2. On pose, pour tout entier naturel n, $u_n = 0,6 - p_n$.
   a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,4 ; préciser son premier terme u_0.
   b. Exprimer u_n puis p_n en fonction de n.
   c. Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Exprimés en pourcentages, les nombres $p(A_n)$ et $p(B_n)$ constituent les prévisions, pour une future année $2000 + n$, des parts de marché respectives de a et b.
   Quelle évolution peut-on prévoir à long terme pour les parts de marché respectives de a et b si le comportement de la clientèle reste toujours le même ?

PROBLÈME **10 points**

Sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1. Expression de la fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{mx} + p$, m et p étant deux constantes.

a. En utilisant les points $\text{P}(1\,;\,1)$ et $\text{M}\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3\text{e}}\right)$ de la courbe $\mathscr{C}$, démontrer que m et p vérifient :

$$\left\{\begin{array}{rcr} m+p & = & 0 \\ m+3p & = & -3 \end{array}\right. .$$

b. En déduire que $f(x) = x\text{e}^{\frac{3}{2}(x-1)}$.

2. Tableau de variations de f.

a. Calculer la limite de f en $+\infty$. On admet que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

b. Vérifier que

$$f'(x) = \left(\frac{3}{2}x+1\right)\text{e}^{\frac{3}{2}(x-1)}.$$

c. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de f.

3. Point de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite (OP)

a. On admet que f' est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$.
Démontrer que, dans l'intervalle c$[0\,;\,1]$, l'équation $f'(x) = 1$ a une solution unique t.
Donner un encadrement de t d'amplitude 10^{-2}.

b. Justifier que t est l'abscisse du point T de la courbe $\mathscr{C}$, situé entre O et P où la tangente est parallèle à la droite (OP).

4. Aire du domaine situé entre la courbe et le segment [OP]

On note $\mathscr{A}$ la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, le segment [OQ] et le segment [PQ] et S la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$ et le segment [OP].

a. Justifier que $S = \dfrac{1}{2} - \mathscr{A}$.

b. Déterminer pour quelle valeur du réel k la fonction

$$G \quad : \quad x \longmapsto k\mathrm{e}^{\frac{3}{2}(x-1)}.$$

est une primitive de la fonction $g \qquad : x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{3}{2}(x-1)}$.

c. Vérifier que $f(x) = \dfrac{2}{3}\left(f'(x) - g(x)\right)$. En déduire une primitive F de f.

d. Démontrer que $\mathscr{A} = \dfrac{2}{9}\left(1 + 2\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)$.

Donner alors la valeur exacte de S puis une valeur approchée de S à 10^{-2} près.