Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie novembre 2004

EXERCICE 1 **3 points**

x	$-\infty$		-2		1		α	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$		
variation de f	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	0	↗ $+\infty$

On a donné le tableau de variations d'une fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ -2[\cup]-2\ ;\ +\infty[$, où α est le nombre réel strictement supérieur à 1 tel que $f(\alpha) = 0$.
On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
Dire pour chacune des cinq affirmations suivantes si elle est VRAIE ou si elle est FAUSSE ou si ON NE PEUT PAS CONCLURE. Aucune justification n'est demandée.
Le barème est le suivant :

— 0,5 point par réponse exacte ;
— 0,25 point par réponse fausse ;
— 0 point pour absence de réponse.

Cet exercice sera noté entre 0 et 3 ; il n'y aura pas de note globale négative.

1. La droite d'équation $y = -2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
2. L'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions.
3. $f(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in]-5\ ;\ -2[$.
4. Sachant que α appartient à l'intervalle $]1\ ;\ 2[$, on a $\displaystyle\int_{\alpha}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x < 0$.
5. Les primitives de f sont croissantes sur l'intervalle $[1\ ;\ \alpha]$.
6. Si $-2 < x < 1$ et $\alpha < x'$ alors $f(x) < f(x')$.

EXERCICE 2 **4 points**

Pour chacune des questions suivantes, indépendantes les unes des autres, il est proposé quatre réponses dont une seule est exacte. Donnez la bonne réponse en justifiant votre choix.

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(2 + \frac{3}{x}\right) = L$

   A. $L = 0$ **B.** $L = \ln 2$ **C.** $L = \ln 5$ **D.** $L = 0,7$.

2. La courbe représentative de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x - 2 + \dfrac{3\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} - 1}$ admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation :

   A. $y = x + 1$ **B.** $y = x - 2$ **C.** $y = x$ **D.** $y = 3$.

3. $I = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x$.

   A. $I = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^3 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}$ **B.** $I = \mathrm{e}^3 - 1$ **C.** $I = 0$ **D.** $I = 2\mathrm{e}^3 - 2\mathrm{e}$.

4. Dans un lycée 45 % des élèves de terminale sont des garçons. Les élèves de ce lycée étudient l'anglais, l'allemand ou l'espagnol en première langue vivante.

- 70 % des élèves étudient l'anglais,
- 20 % des garçons étudient l'allemand,
- 40 % des élèves qui étudient l'anglais sont des garçons,
- il y a autant de garçons que de filles qui étudient l'espagnol.

À l'aide d'un tableau ou d'un arbre, répondre aux questions suivantes :

a. Quel est le pourcentage des garçons qui étudient l'anglais ?

A. 42 % **B.** 28 % **C.** 18 % **D.** 52 %

b. On choisit au hasard la fiche d'un élève parmi ceux qui ne pratiquent pas l'allemand. Quelle est la probabilité que ce soit une fille qui étudie l'espagnol ?

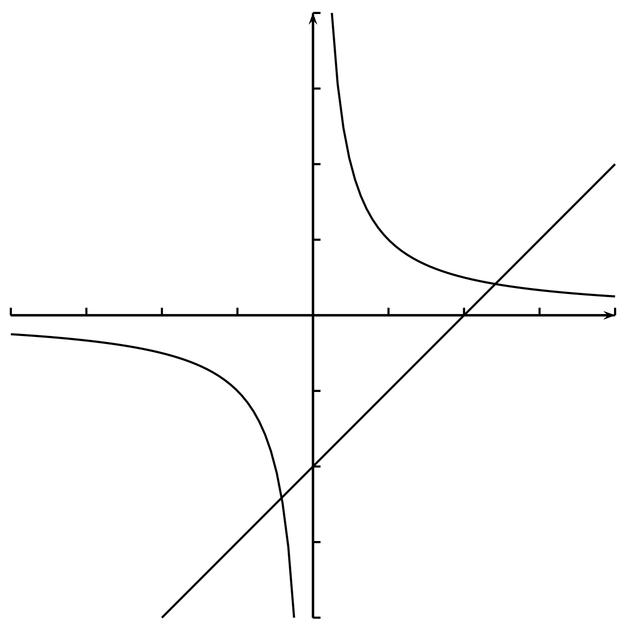
A. $\frac{2}{7}$ **B.** $\frac{4}{43}$ **C.** $\frac{8}{55}$ **D.** $\frac{5}{16}$.

EXERCICE 3 **5 points**

pour les candidats n'ayant pas suivi la spécialité

Soit l'équation (E) : $\frac{1}{x} = x - 2$ où l'inconnue est un réel de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

1. Un élève a représenté sur sa calculatrice l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ et la droite d'équation $y = x - 2$.



Au vu du graphique ci-dessus obtenu à l'écran de sa calculatrice, combien l'équation (E) semble-t-elle admettre de solutions sur $]0\ ;\ +\infty[$?

2. Un second élève considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = x - 2 - \frac{1}{x}.$$

a. Déterminer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition.

b. On note g' la fonction dérivée de g. Calculer $g'(x)$. Montrer que g est strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

c. En déduire le nombre de solutions de l'équation (E) et en donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

3. Un troisième élève dit : « Je peux résoudre l'équation (E) algébriquement ». Justifier, en résolvant l'équation (E), que ce troisième élève a raison.

EXERCICE 3 **5 points**

Pour les candidats ayant suivi la spécialité

Pour modéliser la production d'une entreprise les économistes utilisent des fonctions qui suivent le modèle dit de Cobb-Douglas : $z = Ax^{\alpha}y^{\beta}$ (A, α, β réels strictement positifs), où z désigne une quantité obtenue à partir de deux quantités variables x et y.

Partie A

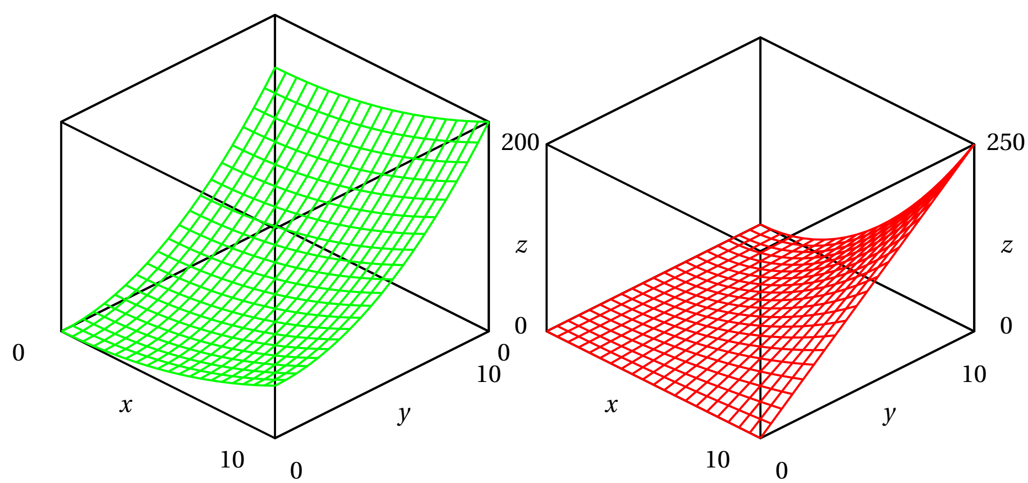
On considère les fonctions f et h définies pour $x \in [0\,;\,10]$ et $y \in [0\,;\,10]$ respectivement par

$$f(x\,;\,y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad h(x\,;\,y) = \frac{1}{4}x^2y.$$

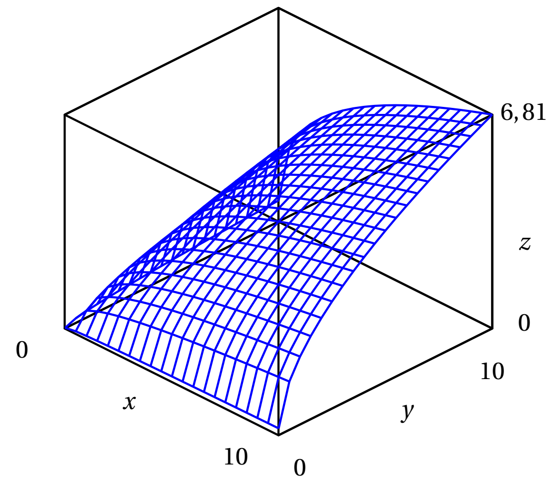
1. Vérifier que f et h sont deux fonctions de Cobb-Douglas en donnant pour chacune d'elles les valeurs A, α, β.

2. Les représentations graphiques de f et h figurent parmi les trois représentations graphiques ci-dessous.

Associer à chaque fonction sa représentation graphique. Les choix seront justifiés.



représentation 1 représentation 2

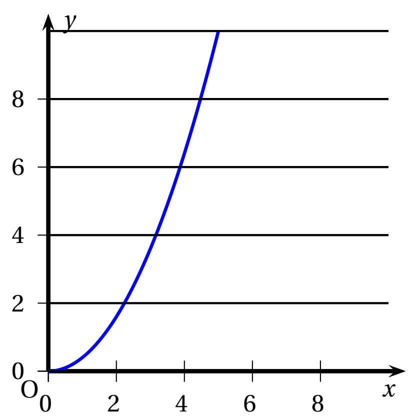


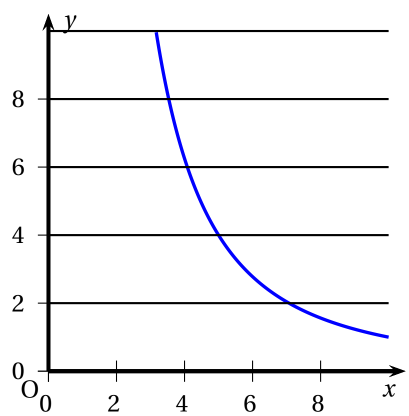
représentation 3

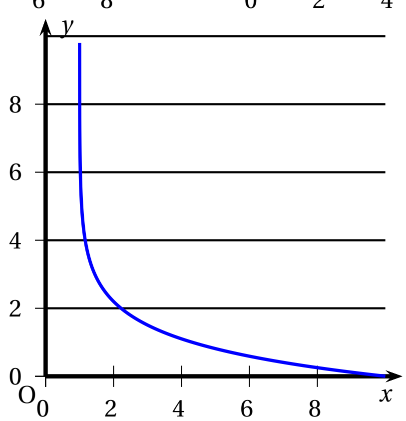
Partie B

La fabrication d'un produit dépend des durées de fonctionnement de deux machines M et M′. Les durées de fonctionnement des machines M et M′ exprimées en centaines d'heures sont respectivement égales à x et y. La quantité produite, exprimée en tonnes, est $z = h(x,\ y)$, où h est la fonction définie à la **partie A**.

1. Dans cette question la quantité produite est fixéeà 25 tonnes.
   Quelle est, parmi les trois représentations graphiques suivantes, celle de la section du plan d'équation $z = 25$ avec la surface d'équation $z = \frac{1}{4}x^2y$?







2. Les horaires de travail font que la somme des durées de fonctionnement des deux machines M et M′ est de huit centaines d'heures.

   a. Montrer que $z = 2x^2 - \dfrac{1}{4}x^3$.

   b. Soit la fonction g définie par $g(x) = 2x^2 - \dfrac{1}{4}x^3$ pour $x \in [0~;~8]$.

   Étudier les variations de g et en déduire les durées de fonctionnement x et y qui assurent une production maximum.

EXERCICE 4 **8 points**

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x\mathrm{e}^x - 1.$$

1. **a.** On admet que la limite de g en $-\infty$ est -1. Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de g. Justifier toutes les affirmations qui sont notées dans ce tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-\dfrac{1}{\mathrm{e}} - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

   b. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

2. On note f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \ln x.$$

   a. Étudier la limite de f en 0.

   b. Vérifier que, pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$, où f' est la fonction dérivée de f.

   c. Dresser le tableau de variations de f, en admettant que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.

3. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal. Prendre 4 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

   Tracer $\mathscr{C}$, en prenant 0,6 comme valeur approchée de α.

4. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x~;~y)$ du plan muni du repère ci-dessus tels que : $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

   a. Hachurer l'ensemble $\mathscr{D}$.

   b. Vérifier que la fonction U définie sur $]0~;~+\infty[$ par $U(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien.

   c. En déduire une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.

   d. Calculer l'aire de $\mathscr{D}$ en unités d'aire. Puis en donner une valeur approchée en cm^2 à 10^{-2} près.