

**∞ Baccalauréat série S Nouvelle – Calédonie ∞**  
**décembre 2000**

**Exercice 1**

**5 points**

Dans l'espace muni du repère orthonormal direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points :

$A(4; 0; 0)$ ,  $B(2; 4; 0)$ ,  $C(0; 6; 0)$ ,  $S(0; 0; 4)$ ,  $E(6; 0; 0)$  et  $F(0; 8; 0)$ .

1. Réaliser une figure comportant les points définis dans l'exercice que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Montrer que E est le point d'intersection des droites (BC) et (OA).
3. On admettra que F est le point d'intersection des droites (AB) et (OC).
  - a. Déterminer les coordonnées du produit vectoriel  $\vec{SE} \wedge \vec{EF}$ . En déduire l'équation cartésienne du plan (SEF).
  - b. Calculer les coordonnées du point  $A'$  barycentre des points pondérés (A, 1) et (S, 3).
  - c. On considère le plan P parallèle au plan (SEF) et passant par  $A'$ . Vérifier qu'une équation cartésienne de P est  $4x + 3y + 6z - 22 = 0$ .
4. Le plan P coupe les arêtes [SO], [SA], [SB] et [SC] de la pyramide SOABC respectivement aux points  $O'$ ,  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ .
  - a. Déterminer les coordonnées de  $O'$ .
  - b. Vérifier que  $C'$  a pour coordonnées  $(0, 2, \frac{8}{3})$ .
  - c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (SB), en déduire les coordonnées du point  $B'$ .
5. Vérifier que  $O'A'B'C'$  est un parallélogramme.

**Exercice 2**

**5 points**

1. a. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation

$$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

Préciser le module et un argument de chacune des solutions.

- b. En déduire les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation

$$(-iz + 3i + 3)^2 - 2(-iz + 3i + 3) + 2 = 0.$$

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  d'unité graphique 2 cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives  $z_A = 1 + i$ ,  $z_B = \overline{z_A}$ ,  $z_C = 2z_B$ .
  - a. Déterminer les formes algébriques de  $z_B$  et  $z_C$ .
  - b. Placer les points A, B et C.
  - c. Montrer que les points A, B et C appartiennent au cercle ( $\mathcal{C}$ ) de centre I d'affixe 3 et de rayon  $\sqrt{5}$ .
  - d. Calculer  $\frac{z_C - 3}{z_A - 3}$ ; en déduire la nature du triangle IAC.
  - e. Le point E est l'image du point O par la translation de vecteur  $2\vec{IC}$ . Déterminer l'affixe du point E.

- f. Le point D est l'image du point E par la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .  
Déterminer l'affixe du point D.
- g. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

**Exercice 2****spécialité**

Dans tout l'exercice  $x$  et  $y$  désignent des entiers naturels non nuls vérifiant  $x < y$ .  
S est l'ensemble des couples  $(x, y)$  tels que  $\text{PGCD}(x; y) = y - x$ .

1. a. Calculer le  $\text{PGCD}(363; 484)$ .  
b. Le couple  $(363; 484)$  appartient-il à S?
2. Soit  $n$  un entier naturel non nul; le couple  $(n; n + 1)$  appartient-il à S?  
Justifier votre réponse.
3. a. Montrer que  $(x; y)$  appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel  $k$  non nul tel que  $x = k(y - x)$  et  $y = (k + 1)(y - x)$ .  
b. En déduire que pour tout couple  $(x; y)$  de S on a :  
 $\text{PPCM}(x; y) = k(k + 1)(y - x)$ .
4. a. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.  
b. En déduire l'ensemble des couples  $(x; y)$  de S tels que  
 $\text{PPCM}(x; y) = 228$ .

**Problème****10 points**

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 cm.

**Partie A**

On considère la fonction numérique  $u$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$u(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

et on désigne par  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative.

1. a. Déterminer la limite de  $u$  en  $-\infty$ .  
b. Montrer que, pour tout  $x$  réel, on a  $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$ .  
En déduire la limite de  $u$  en  $+\infty$ .
2. a. Montrer que  $[u(x) + 2x]$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $-\infty$ .  
b. Montrer que pour tout  $x$  réel, on a  $u(x) > 0$ . En déduire le signe de  $[u(x) + 2x]$ .  
c. Interpréter graphiquement ces résultats.
3. a. Montrer que la dérivée de la fonction  $u$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$u'(x) = \frac{-u(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

- b. Étudier les variations de la fonction  $u$ .
4. Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$  et son asymptote oblique.

**Partie B**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \int_0^x \frac{-1}{\sqrt{t^2+1}} dt.$$

et  $(\Gamma)$  sa courbe représentative.

1. Justifier que pour tout  $x$  réel on a  $f(x) = \ln u(x)$  en utilisant la question **A 3. a.**
2. Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$ , puis en  $+\infty$  et étudier les variations de  $f$ .
3. **a.** Déterminer une équation de la droite  $(T)$  tangente à la courbe  $(\Gamma)$  au point d'abscisse 0.  
**b.** On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\varphi(x) = f(x) + x$ . Montrer que  $\varphi$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  et que  $\varphi(0) = 0$ . En déduire la position de la courbe  $(\Gamma)$  par rapport à la tangente  $(T)$ .
4. Tracer sur le même graphique la courbe  $(\Gamma)$  et la tangente  $(T)$ .

**Partie C**

1. On pose  $\alpha = \frac{1-e^2}{2e}$ , montrer que  $u(\alpha) = e$  et en déduire  $f(\alpha)$ .
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\int_{\alpha}^0 \ln(\sqrt{x^2+1} - x) dx$ .
3. Soit  $V$  une primitive de  $u$  et  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ .  
**a.** Montrer que  $u\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) = e^{-t}$ .  
**b.** Justifier que  $V \circ g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que sa dérivée est définie par

$$(V \circ g)'(t) = \frac{1 + e^{-2t}}{2}.$$

- c.** En déduire que  $V(0) - V(\alpha) = (V \circ g)(0) - (V \circ g)(-1) = \int_{-1}^0 \frac{1 + e^{-2t}}{2} dt$ ,  
puis que  $\int_{\alpha}^0 u(x) dx = \frac{e^2 + 1}{4}$ .
4. On admet que pour tout  $x$  réel,  $f(x) < u(x)$ .  
Déduire des questions précédentes l'aire, en unité d'aires, du domaine limité par les courbes  $(\mathcal{C})$ ,  $(\Gamma)$  et les droites d'équation  $x = \alpha$  et  $x = 0$ .