Durée : 4 heures

Baccalauréat C Nouvelle-Calédonie novembre 1994

EXERCICE 1 points

On se propose de calculer l'intégrale :

$$J = \int_0^1 \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^3}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer les deux intégrales :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \\ B &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

2. Déterminer trois nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre réel t positif ou nul on ait :

$$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2} \qquad (1)$$

3. En posant $t = \mathrm{e}^x$ dans l'égalité (1), calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

4. **a.** À l'aide d'une intégration par parties exprimer J en fonction de I.
   b. En déduire la valeur de J. À l'aide de la calculatrice donner une valeur approchée de J à 10^{-2} près.

EXERCICE 2 points

1. Calculer les racines complexes z_1 et z_2 de l'équation :

$$z^2 - \frac{1}{5}z + \frac{1}{10} = 0.$$

   z_1 désignant la racine de partie imaginaire positive.
2. Soit θ le nombre réel de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\theta = 3$.
   Montrer que z_1 et z_2 sont égaux respectivement à $\dfrac{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}{10\cos\theta}$ et $\dfrac{\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}{10\cos\theta}$.
3. On pose, pour tout entier naturel n,

$$v_n = z_1^n + z_2^n.$$

   Montrer que v_n est un nombre réel que l'on calculera en fonction de n et θ.
4. Montrer que $10\cos\theta = \sqrt{10}$. Majorer $|v_n|$, puis en déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 3 **points**

On donne sur un cercle quatre points distincts A, B, C, D (C et D n'étant pas diamétralement opposés). Le cercle de centre D passant par A recoupe la droite (CA) en A$'$. Le cercle de centre D passant par B recoupe la droite (CB) en B$'$.

Le but de l'exercice est de prouver qu'il existe une rotation transformant A en A$'$ et B en B$'$ et de déterminer ses éléments caractéristiques.

1. On note H et K les projetés orthogonaux de D sur (CA) et (CB). Comparer les angles $\left(\overrightarrow{\text{DA}},\ \overrightarrow{\text{DA}'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\text{DA}},\ \overrightarrow{\text{DH}}\right)$.

   Établir une propriété analogue pour $\left(\overrightarrow{\text{DB}},\ \overrightarrow{\text{DB}'}\right)$.
2. Montrer que : $\left(\overrightarrow{\text{DA}},\ \overrightarrow{\text{DH}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{AD}},\ \overrightarrow{\text{AC}}\right) + \dfrac{\pi}{2}$ (modulo π) et :

   $\left(\overrightarrow{\text{DB}},\ \overrightarrow{\text{DK}}\right) = \left(\overrightarrow{\text{BD}},\ \overrightarrow{\text{DC}}\right) + \dfrac{\pi}{2}$ (modulo π).
3. Qu'en déduit-on pour $\left(\overrightarrow{\text{DA}},\ \overrightarrow{\text{DA}'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\text{DB}},\ \overrightarrow{\text{DB}'}\right)$?

   On note θ une mesure de $\left(\overrightarrow{\text{DA}},\ \overrightarrow{\text{DH}}\right)$ modulo 2π.

   Conclure.

PROBLÈME **points**

Le but du problème est de résoudre une équation différentielle et d'étudier, sur $[0~;~+\infty[$, une solution particulière de cette équation.

Partie A

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) $y'' + 4y' + 4y = 0$.
2. On considère l'équation différentielle (E_2) $y'' + 4y' + 4y = 4x - 16$.
   - **a.** Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - 5$ est solution de (E_2).
   - **b.** Montrer qu'une fonction f est solution de (E_2) si et seulement si $f - g$ est solution de (E_1).

     Déduire de 1. et de 2. b. l'ensemble des solutions de (E_2).

     Déterminer la fonction f solution de (E_2) qui vérifie :

$$f(0) = -2 \quad \text{et} \quad f'(0) = -3.$$

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = (2x+3)\mathrm{e}^{-2x} + x - 5.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité 1 cm).

1. Déterminer la fonction f' dérivée de la fonction f, puis la fonction f'' dérivée de f'.
2. Étude de f'.
   - **a.** Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $f''(x)$ est strictement positif.
   - **b.** Montrer que la limite de $xe - 2x$ en $+\infty$ est 0. En déduire la limite de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

     Donner le tableau de variation de f' sur $[0~;~+\infty[$.

c. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique sur $[0\ ;\ +\infty[$. On la note α. Justifier que $1 \leqslant \alpha \leqslant 1,1$ à l'aide de la calculatrice.

d. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3. Étude de f

a. Dresser le tableau de variation de f.
Quelles sont les valeurs décimales approchées par défaut de $f(1)$ et $f(1,1)$ données par la calculatrice ?

b. Tracer la droite Δ d'équation $y = x - 5$ et $\mathscr{C}$.

Partie C

Soit F la primitive qui s'annule en zéro de la fonction f définie dans la partie B.
On se propose de calculer F par deux méthodes différentes.

1. Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f'(x) + 4f(x) + 4F(x) = 2x^2 - 16x - 11.$$

En déduire une expression de $F(x)$.

2. Calculer $F(x)$ à l'aide d'une intégration par parties.