

☞ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie novembre 1996 ☞

EXERCICE 1

4 points

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

1. Une urne U contient 4 jetons blancs et 3 noirs. On tire successivement les 7 jetons sans remise.
 X est la variable aléatoire qui prend pour valeur k si le premier jeton blanc apparaît au k -ième tirage.
Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.
2. Une autre urne U' contient 17 jetons blancs et 18 noirs.
On jette un dé cubique dont chaque face a la même probabilité d'apparaître. Si le 6 apparaît, on tire un jeton de l'urne U, sinon on tire un jeton de l'urne U' .
 - a. Démontrer que la probabilité de tirer un jeton blanc est égale à 0,5.
 - b. On a tiré un jeton blanc, calculer la probabilité pour qu'il provienne de U.

EXERCICE 2

6 points

Enseignement obligatoire

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et 4.

L'application f associe à tout point M d'affixe z de P , distinct de A, le point M' d'affixe Z définie par :

$$Z = \frac{z-4}{z-1}.$$

1. Soit C le point d'affixe $i\sqrt{2}$.
Déterminer l'affixe de $C' = f(C)$.
2. Démontrer que f admet deux points invariants I et J. (On notera I celui d'ordonnée positive.)
Placer les points I, J, C et C' .
3. On pose $z = x + iy$ et $Z = X + iY$ avec x, y, X, Y réels.
 - a. Déterminer X et Y en fonction de x et y .
 - b. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit réel.
 - c. Déterminer et construire l'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.
 - d. Donner une interprétation géométrique de $|Z|$, $|z-4|$, $|z-1|$.
En déduire l'ensemble D des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$.
Construire D.

EXERCICE 2**6 points****Enseignement de spécialité**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (Γ) est l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $(x(t); y(t))$ telles que :

$$x(t) = \frac{2}{\cos t} \quad \text{et} \quad y(t) = 3 \tan t$$

quant t décrit l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

1. **a.** Comment $M(-t)$ se déduit-il de $M(t)$? En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie.
- b.** Étudier les variations des fonctions x et y sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}[$.
2. **a.** Démontrer que (Γ) est contenue dans l'hyperbole (H) d'équation :

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

- b.** Préciser les asymptotes à (H) , on les notera D et D' ; les placer sur la figure.
- c.** Construire (Γ) .

PROBLÈME**10 points****Partie I**

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

ainsi que sa courbe représentative \mathcal{C} dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Calculer la dérivée de f .
2. En déduire le tableau de variation de f . Préciser les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Tracer \mathcal{C} . On choisira une unité graphique de 4 cm.

Partie II

1. Calculer $J = \int_0^1 x e^{-x} dx$.
2. Vérifier que f est telle que : $f'(x) + f(x) = 2x e^{-x}$.
3. En déduire que

$$\int_0^1 f(x) dx = 2J - f(1)$$

(J est définie à la question **II - 1.**)

Partie III

L'équation $f(x) = f(2)$ admet une seconde solution, notée α , et appartenant à l'intervalle $I = [-1 ; 0]$.

1. Soit $g(x) = \left(-\frac{2}{e}\right) e^{\frac{x}{2}}$. Montrer que $f(\alpha) = f(2)$ équivaut à $g(\alpha) = \alpha$.
2. Montrer que $g(I)$ est inclus dans I et que $|g'(x)| \leq \frac{1}{e}$ pour tout x appartenant à I .
3. En déduire que $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{e} |x - \alpha|$ pour tout x appartenant à I .
4. On définit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} U_0 = -0,5 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases} \text{ pour tout entier } n \geq 0$$

On admet que U_n appartient à I pour tout entier $n \geq 0$.

Montrer que

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n} |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2e^n}$$

pour tout entier $n \geq 0$.

5. Déterminer le plus petit entier n tel que l'inégalité précédente fournisse une valeur approchée de α à 10^{-6} près.